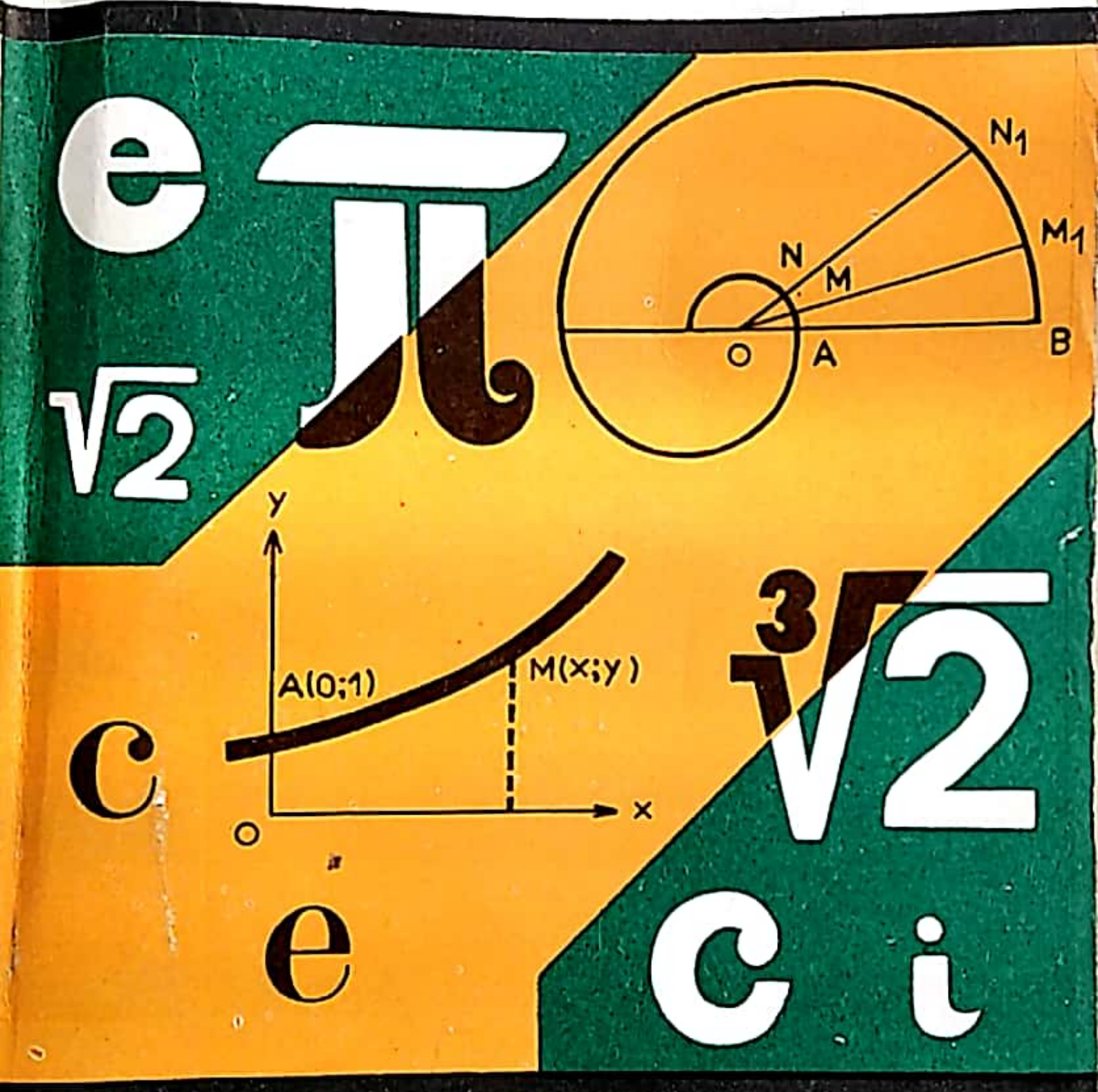
Florica T. Câmpan

DIN ISTORIA CÎTORVA NUMERE DE SEAMĂ



Lyceum Editura Albatros

Florica T. Câmpan

DIN ISTORIA CÎTORVA NUMERE DE SEAMĂ

Coperta de
EMIL CRISTESCU

Lyceum

Profesor dr. docent
Florica T. Câmpan

DIN ISTORIA CÎTORVA NUMERE DE SEAMĂ

Editura Albatros

Dedic această carte
memoriei profesorilor
care m-au făcut să îndrăgesc matematicile:
SILVIA CREANGĂ,
prima femeie doctor în matematici
din țara noastră,
și ALEXANDRU MYLLER,
călăuza școlii românești
de matematici.

CUVÎNT ÎNAINTE

Îndemnul pentru a scrie acest volum mi-a venit din partea profesorului Georges Bouligand, profesor onorific la Facultatea de Ştiinţe din Paris, figură bine cunoscută în lumea matematicienilor de la noi şi din alte părţi. Trimiţîndu-i, în semn de omagiu, cartea mea „Istoria numărului π", d-sa mi-a răspuns, sugerîndu-mi să mai scriu una, în care să prezint, alături de istoria numărului π, şi pe acelea ale altor numere favorite, *ca :* $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, π, *„i", „e" sau „C".*

Am început să răsfoiesc din nou cărţile şi revistele Seminarului Matematic „Alexandru Myller" din Iaşi şi, după ce capitolele au prins contur, s-a ivit ocazia să le pot discuta chiar cu cel ce mi le sugerase. A fost în vara anului 1968, în timpul celui de al XII-lea Congres Internaţional de Istorie a Ştiinţelor, ţinut la Paris.

Am amintit aceasta aici, ca să mai pot mulţumi, încă odată, profesorului Georges Bouligand.

PREISTORIA NUMĂRULUI II

În dezvoltarea istorică şi în geneza mintală a activităţii matematice, se observă o etapă în care ideea de demonstraţie nu se prezintă încă destul de clar. Totuşi, şi la acel nivel este posibilă o anumită mînuire a numărului şi a noţiunilor geometrice.

F. GONSETH

Într-o zi, un moş-strămoş de-al nostru, acum cine ştie cîte zeci de mii de ani, a înţeles că lungimea cercului se poate măsura. Nimeni nu va şti vreodată cui i-a venit această ideel

Poate vreunui iscusit mînuitor al arcului cu săgeţi, în timp ce ajusta din ochi lungimea nuielei menită să devină arc. Să-l fi străfulgerat ideeă că lungimea coardei cu care-i lega capetele trebuie potrivită după aceea a nuielei? Ca să se încredinţeze — poate — va fi îndoit varga, făcînd-o cerc, şi după ce i-a măsurat „lărgimea", adică diametrul, dezdoind-o s-a putut încredinţa că ea intră de vreo trei ori în lungimea cercului. Sau, poate, acel neştiut matematician să fi fost un iscusit împletitor de coşuri din nuiele, care se străduia să dea gurii coşului nu numai forma rotundă, ca a Lunei pline, ci şi o anumită „lărgime"?

Oricine va fi fost, descoperirea l-a uimit nu numai pe el, ci şi pe toţi cei din jurul şi din vremea lui, căci observaţia a dezvăluit taina celei mai măreţe şi îndrăgite forme: aceea a Soarelui, uneori a Lunei şi întotdeauna a orizontului...

Acum această taină se dovedea a fi o lege stabilită prin măsurare, care spunea că lungimea cercului este de trei ori mai mare decît „lărgimea" lui! Rezultatul a fost transmis pretutindeni din generaţie în generaţie, şi astfel toţi cei ce

voiau să obţină un „cerc" — olarul, rotarul, cioplitorul în piatră — îl puteau face la mărimea dorită, nu la întîmplare.

Desigur că în epoca aceea — ce nu poate fi fixată exact în timp — măsurarea lungimilor nu se executa cu o unitate de măsură bine precizată, ca azi, cînd folosim metrul cu multiplii şi submultiplii săi. Veacuri de-a rîndul, drept unităţi de măsură s-au folosit degetul, palma, piciorul, braţul sau alte asemenea lungimi, variabile de la loc la loc şi de la om la om. Nimeni nu se gîndea la precizia operaţiei de măsurare. Mai degrabă se bucura dacă rezultatul se exprima prin numere întregi, singurele cunoscute şi acceptate ca atare. Nimeni nu făcea caz de faptul că cercul este o linie curbă, pe cînd diametrul folosit ca unitate de măsură este o linie dreaptă. Şi tocmai fiindcă nu se bănuia ce complicaţii vor apărea mai tîrziu, în legătură cu alegerea unei unităţi de măsură şi în general cu problema măsurării lungimii cercului, „matematicienii" preistorici au putut stabili, fără multă bătaie de cap, această primă valoare egală cu 3, a raportului dintre cerc şi diametru. Azi valoarea lui e însemnată cu litera grecească π. Pe atunci însă nici scrisul nu se inventase, şi nici despre numărul 3 oamenii nu aveau o noţiune prea clară. Tot în mod intuitiv au privit ei şi alte spinoase probleme ale geometriei de azi care se cereau cunoscute pentru a se ajunge la mărimea acestui raport, ca de pildă distanţa dintre două puncte sau dependenţa funcţională dintre două mărimi.

Pe măsură ce s-au dezvoltat condiţiile sociale şi economice la aceste cunoştinţe matematice, dobîndite mai întîi intuitiv, s-au adăugat altele, obţinute prin raţionament matematic, ca: măsurarea ariei unei figuri plane şi din spaţiu ş. a. Rezultatele intrate în practica curentă a vieţii au continuat să fie transmise oral, de multe ori în versuri, ca să fie mai uşor de memorat, cum a fost cazul la unele popoare din India. De reţinut este că nu se transmitea decît *procedeul practic* de rezolvare a unei probleme matematice şi nu raţionamentul prin care a fost stabilit. O dovedesc cele mai vechi texte, unele datînd din al doilea mileniu î. e. n. De pildă, pe una dintre tăbliţele de lut ars descoperite în Mesopotamia

a fost descifrată problema : „Dacă 60 este lungimea cercului a treia parte din 60 fac 20. Acesta este diametrul lui". Iată aici o primă indicație scrisă a valorii $\pi = 3$! Exact în același stil lapidar și practic regăsim problema în textele egiptene, chinezești, la hinduși și la alte popoare din antichitate.

Faptul se explică ușor, fiindcă după cum se știe, descoperirile științifice făceau parte din tezaurul clasei conducătoare, iar în școlile de scribi sau de tehnicieni nu se dădeau mai multe amănunte decît ceea ce se cuprinde și azi într-un formular matematic. Deosebirea este că azi tehnicianul care ar dori să înțeleagă metoda folosită pentru stabilirea unei anumite formule o poate face, avînd la îndemînă cursurile teoretice legate de specialitatea respectivă, pe cînd pe atunci asemenea posibilități lipseau.

În legătură cu valoarea $\pi=3$, figurile desenate în textele amintite arată clar că cercul era aproximat prin hexagonul regulat înscris. Aproximația aceasta, destul de puțin precisă, probabil că nu satisfăcea pe agrimensorii egipteni, pentru care măsurarea ariilor ogoarelor inundate anual de revărsarea Nilului avea o importanță deosebită. În problema 48 din Papyrusul Rhind (*1*) se dovedește aceasta. Iată textul problemei : „Compararea ariei cercului și a pătratului circumscris". În continuare sînt indicate următoarele calcule, pentru cercul de diametru 9 : „Ia $\frac{1}{9}$ din diametru, adică 1, rămîne 8*. Mărește pe 8 de 8 ori, fac 64. Deci aria este de 64 setat**. Acesta-i tot ce ni se spune : că aria cercului este de 64 setat.

Analizată însă mai atent, problema destăinuie un rezultat surprinzător, anume o nouă valoare mai precisă pentru numărul π. Ca să o punem în evidență, să cercetăm mai îndeaproape calculele indicate, transcriind rezultatele în limbajul nostru.

---

* Unitatea de lungime folosită în Egiptul antic era *numită khet* și avea aproximativ 17,25 m.

** Unitatea de arie se numea setat. 1 setat = 1 khet².

Alături de această problemă există şi un mic desen reprezentînd un patrat, în care este înscris octogonul obţinut prin tăierea colţurilor lui, la o distanţă de aproximativ o treime de vîrfuri. Figura arată că de data aceasta aproximarea ariei cercului nu se mai face prin înlocuirea ei cu aceea a hexagonului, ci prin aria octogonului, format tăind colţurile pătratului circumscris, după ce laturile lui au fost împărţite în trei părţi egale (fig. 1).

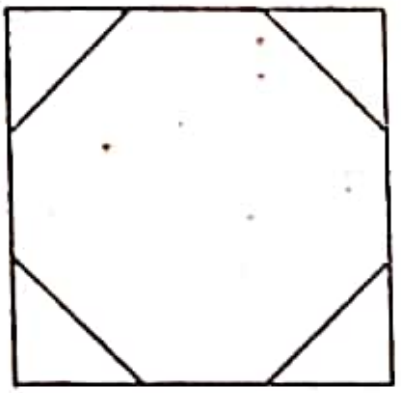
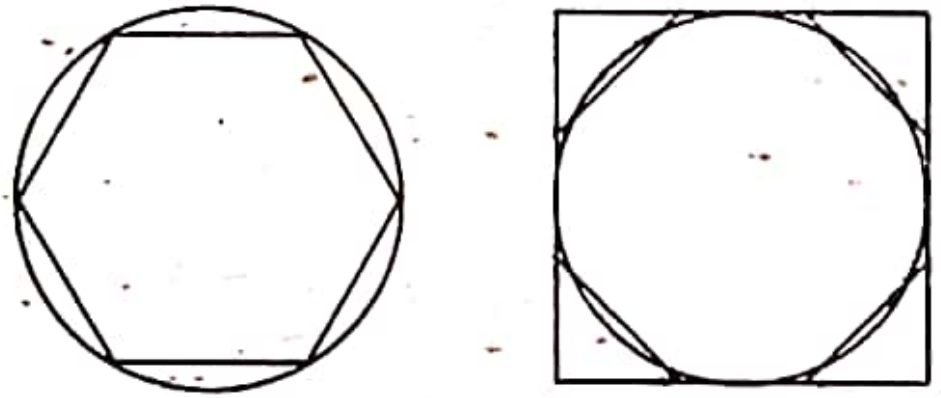


Fig. 1



a *b*

Fig. 2

Este evident că aria octogonului aproximează mai bine pe aceea a cercului decît o face aceea a hexagonului (fig. 2*a*), căci octogonul taie cercul şi astfel părţile din arie care prisosesc compensează pe acelea care lipsesc (fig. 2 *b*).

Aria acestui octogon se calculează uşor. Şi iată cum: diametrul cercului are lungimea de 9 khet, fiind egală cu latura pătratului circumscris. Aşadar, colţurile din vîrfurile pătratului sînt 4 triunghiuri dreptunghice isoscele, cu catetele de cîte 3 khet. Dar ariile acestor 4 triunghiuri,

eliminate prin tăierea vîrfurilor, dau de două ori aria unui pătrat cu latura de 3 khet. Aria unui singur pătrat fiind de 9 setat, este egală cu a unui dreptunghi cu laturile de 1 și 9 khet, care ar reprezenta o fișie tăiată de-a lungul uneia dintre laturile pătratului inițial. Tăind deci două fișii (fig. 3) de-a lungul a două laturi perpendiculare se obține un nou patrat, $ABCD$, cu laturile de 8 khet (conform indicației $9-1=8$) a cărui arie, de 64 setat, este egală cu a octogonului, deci și cu a cercului considerat. Notînd cu r raza cercului înscris, cu l latura patratului și cu A aria cercului, avem : $l = 2\ r$; $A = \pi r^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 4r^2$.

De aici rezultă $\pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}16$. Iată o nouă valoare stabilită de egipteni pentru numărul π, găsind că aria cercului de diametru 9 khet este de 64 setat și nu de 60,75 setat, cît ar fi rezultat dacă ar fi socotit că $\pi = 3$. Desigur că această valoare nu atinge aproximația actuală, dar ea reprezintă o etapă nouă în drumul spre progres. Foarte probabil, însă, ca această valoare a lui π să fi fost stabilită cu multă vreme înainte de al doilea mileniu î. e. n. dacă ajunsese să fie folosită curent în școala de scribi. Din figura 4 se poate vedea că una din erorile strecurate în calcul provine din neglijarea pătratului mic haşurat în figură, cu latura de 1 khet, care-i considerat de două ori. Dintr-o altă problemă, descifrată în alt papyrus aflat azi la Moscova, se constată că, folosind

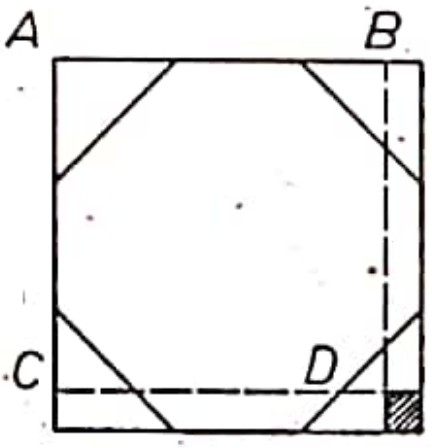


Fig. 3

metoda octogonului, egiptenii au ajuns la valoarea $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$ nu numai pentru a calcula aria cercului, ci și a lungimii lui. Problema nr. 10 a papyrusului din Moscova este mai complicată decît problema 48, căci aici calculul lungimii unui cerc intervine doar ca o operație intermediară pentru stabilirea ariei unei emisfere. Iată enunțul, transcris în traducere: „Socoteala unui coș, cînd ți se spune că un coș are o lărgime la gură de $4\frac{1}{2}$. Fă-mă să cunosc aria lui". Ca și în problema 48, fără a se arăta vreun raționament care să justifice calculul, urmează aceste indicații: „Socotește $\frac{1}{9}$ din 9, pentru că un coș este $\frac{1}{2}$ dintr-un ou*. Rezultă 1. Calculează restul care este 8. Ia $\frac{1}{9}$ din 8. Acum socotește restul din acest 8 și $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$. Fac $7\frac{1}{9}$**. Socotește $7\frac{1}{9}$ de $4\frac{1}{2}$ ori. Fac 32. Iată, aceasta este aria!"

Aplicînd în formula care dă aria unei emisfere valorile indicate în problemă și admițînd $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$, avem într-a-

---

* Cosul se presupune a fi o emisferă, iar hieroglifa care indică oul înseamnă, în același timp, și sferă.

** După cum se știe, egiptenii exprimau orice fracție printr-o sumă de fracții fundamentale, adică de forma: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ și toate celelalte cu numărătorul 1. De asemenea, nu aveau un semn pentru adunare, ci scriau fracțiile unele după altele. Așadar, expresia: $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}, \frac{1}{18}$ însemna $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{8}{9}$ iar $8\frac{8}{9} = 8 \cdot \frac{8}{9} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$.

devăr: A emisf. $= 2\pi r^2 = 2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 32$ căci dacă diametrul $d = 4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, atunci $r = \frac{9}{4}$.

Rămîne să vedem cum au calculat egiptenii perimetrul figurii cu care au înlocuit cercul. Primele indicaţii sînt exact aceleaşi ca şi în problema 48. Aşadar, se consideră din nou pătratul de latură 9 şi se ajunge la patratul $ABCD$ de latură $9 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$* echivalent cu octogonul înscris (fig. 4).

Am văzut că pentru aflarea ariei unui cerc s-a substituit acesteia aria octogonului. Pentru aflarea lungimii cercului, însă, diferenţa dintre perimetrul acestui octogon şi lungimea cercului a fost considerată ca fiind prea mare. Pentru o mai bună aproximare a lungimii cercului s-a repetat procedeul de transformare a patratului $ABCD$ într-un alt octogon. Adică s-au tăiat din nou colţurile patratului $ABCD$ şi noul octogon astfel obţinut a fost transformat într-un nou pătrat *abcd*. Perimetrul acestui nou patrat (fig. 4) a fost egalat cu lungimea cercului. Întregul raţionament arătat aici poate fi dedus urmărind calculele:

1. Din latura pătratului circumscris cercului de diametrul 9 se scade $\frac{1}{9}$ din latură, ca să se capete latura pătratului $ABCD$:

$$9 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \text{ sau } 9 - 1 = 8.$$

2. Din latura patratului obţinut ($ABCD$), prin tăierea celor două fîşii late de $\frac{1}{9}$ din latură, se taie iar cîte o fîşie

* În acest caz se consideră latura pătratului drept unitate şi de aceea din 9 se scade $\frac{1}{9}$ şi nu 1, ca atunci cînd latura ar fi privită ca avînd 9 unităţi.

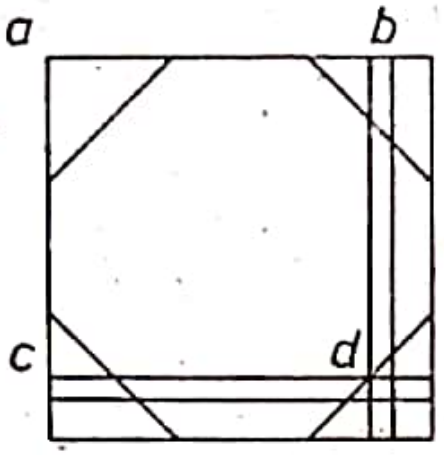


Fig. 4

lată de $\frac{1}{9}$ din $\frac{8}{9}$. Lungimea laturii celui de al doilea pătrat este :

$$8 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}\right) = 8 - \frac{8}{9} = 7\frac{1}{9}.$$

Se obține un al treilea pătrat cu perimetrul

$$4 \cdot \frac{64}{9} = 4 \cdot \frac{8^2}{9}$$

Acest perimetru este considerat egal cu lungimea cercului de diametrul 9. De aici rezultă :

$$\pi \cdot 9 = 4 \cdot \frac{8^2}{9} \text{ sau } \quad \pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

Am analizat aceste două probleme pentru ca din ele să desprindem o nouă valoare a numărului π, anume $\pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$. Desigur că existența sau valoarea acestui număr constant π nu a preocupat pe vreunul dintre absolvenții acelor școli de scribi din antichitate. Ei se pregăteau să știe cum să rezolve, în mod practic, anumite probleme matematice puse de necesitățile zilnice. Existența și identitatea numărului π va interesa abia, multe secole mai tîrziu, pe matematicienii greci. Preluînd de la egipteni cunoștințele

matematice înfăţişate sub formă de reţete practice, învăţaţii greci le-au cercetat structura logică, aşa cum un copil desface o jucărie ca să-i cunoască mecanismul. Încîntaţi de descoperirea făcută, ei au transformat treptat acele cunoştinţe disparate, legate de figuri, într-o ştiinţă teoretică armonios închegată, căreia i-au dat numele *geometrie*, cuvînt ce aminteşte originea ei practică (2).

Istoria numărului π va rămîne astfel multă vreme legată de istoria geometriei, el nefiind considerat ca număr abstract, ci ca o mărime geometrică. Aceasta din cauză că, furaţi de vraja raţionamentului logic, matematicienii greci socoteau drept numere numai întregii din şirul natural 1, 2, 3,... în timp ce numerele fracţionare $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \text{ etc.}\right)$ erau privite ca mărimi ce exprimau raportul dintre două lungimi, două arii ori volume, şi în general raportul între două mărimi fizice.

GEOMETRIA GREACĂ ȘI NUMERELE IRAȚIONALE

Activitatea matematică se naște din probleme *și un anumit fel de a le grupa, după o metodă care să indice operațiile ce conduc la* construire. *Sinteza urmează după aceea...*

GEORGES BOULIGAND

Dacă prin tradiție teoremele despre triunghiurile asemenea și deci problemele privind proporționalitatea și măsurarea segmentelor se atribuie lui Thales din Milet (sec. VII î. e. n.), sigur este faptul că un secol mai tîrziu, în școala lui Pitagora, aceste probleme erau aplicate în mod curent. Cu mult înainte, însă, împărțirea unui segment de dreaptă într-un număr de părți egale a sugerat posibilitatea de a-i măsura lungimea și chiar de a extinde acest proces și la alte mărimi. În toate acele cazuri se considera mărimea de măsurat (A) ca o mulțime formată dintr-un anumit număr de părți egale (a). Pentru a exprima măsura, s-a introdus simbolul $\frac{A}{a}$, numit raportul dintre mărimea de măsurat (A) și mărimea unitate (a).

Întocmai ca și noi, egiptenii și babilonienii au privit acest raport ca pe un număr — număr fracționar — și au operat cu el exact ca și cu numerele întregi. Singura deosebire față de noi este că ei nu s-au întrebat în ce condiții se pot extinde operațiile asupra numerelor întregi și la cele fracționare.

Pitagoreicii însă, vedeau în acest raport o entitate *diferită de număr* și au stabilit reguli precise de operații cu asemenea mărimi, numite *geometrice* dacă ele proveneau din măsurarea obiectelor geometrice, sau *fizice* dacă raportul era format din mărimi fizice. Pitagoreicii aveau un cult

pentru numărul întreg și, probabil, de aceea au evitat să alăture de numerele întregi cîtul lor. De altfel, toți matematicienii greci de mai tîrziu, pînă la Diofantes (sec. III e. n.), au considerat numai întregii din șirul natural: 1, 2, 3,... *drept numere*, celelalte numere (fracționare și apoi iraționale) fiind socotite numai ca *mărimi*. Atîta timp cît măsura unei mărimi s-a putut exprima numai prin cîtul format de o pereche de numere naturale (A, a), această *mărime-cît* nu contrazicea doctrina care se baza pe principiul că lucrurile sînt numere *. Dar problemele în care intervenau rapoarte și proporții au condus la altele, în care mărimile nu mai aveau între ele un raport exprimat printr-o fracție $\frac{A}{a}$, unde A și a să fie numere naturale.

Faptul merită semnalat, căci descoperirea acestor mărimi a dezlănțuit una din cele mai grave crize din istoria matematicilor: *scandalul mărimilor iraționale* (3). Ca această criză să dispară, ar fi fost necesară lărgirea noțiunii de număr, în așa fel ca ea să cuprindă pe lîngă numerele naturale, numerele fracționare sau raționale și cele iraționale. Dacă pitagoreicii ar fi admis, așa cum admitem noi azi, că $\frac{2}{3}$ sau $\sqrt{2}$ sînt numere reale, ca și 2 sau 5, istoria matematicilor ar fi fost alta... Matematicienii din școala lui Pitagora se aflau, însă, față în față cu una dintre contradicțiile fatale pentru concepția lor despre lume. Pe de o parte $\sqrt{2}$ exista ca mărime geometrică, perfect determinată, fiind sau latura pătratului de arie de două ori mai mare decît a unui pătrat dat, de latură l, sau diagonala pătratului de latură l. Pe de altă parte, acest segment, care putea fi construit cu rigla

---

* Din contră, orice mărime care se putea exprima prin cîtul dintre două numere întregi, adică printr-o fracție ireductibilă, ca de pildă $\frac{2}{3}$, întărea și adevera afirmația *că numărul întreg este principiul tuturor lucrurilor.*

și compasul fără nici o complicație, apărea ca un segment bizar și monstruos, căci mărimea lui *nu se putea exprima* prin raportul dintre două numere naturale! Stabilirea existenței unor *mărimi incomensurabile* a stîrnit discuții aprinse, căci odată puse în evidență, ele continuau să apară mereu din alte probleme și sub alte înfățișări. Pentru a pune capăt misterului care le înconjura, se impunea o demonstrație a imposibilității exprimării unor atari mărimi prin raportul dintre două numere naturale.

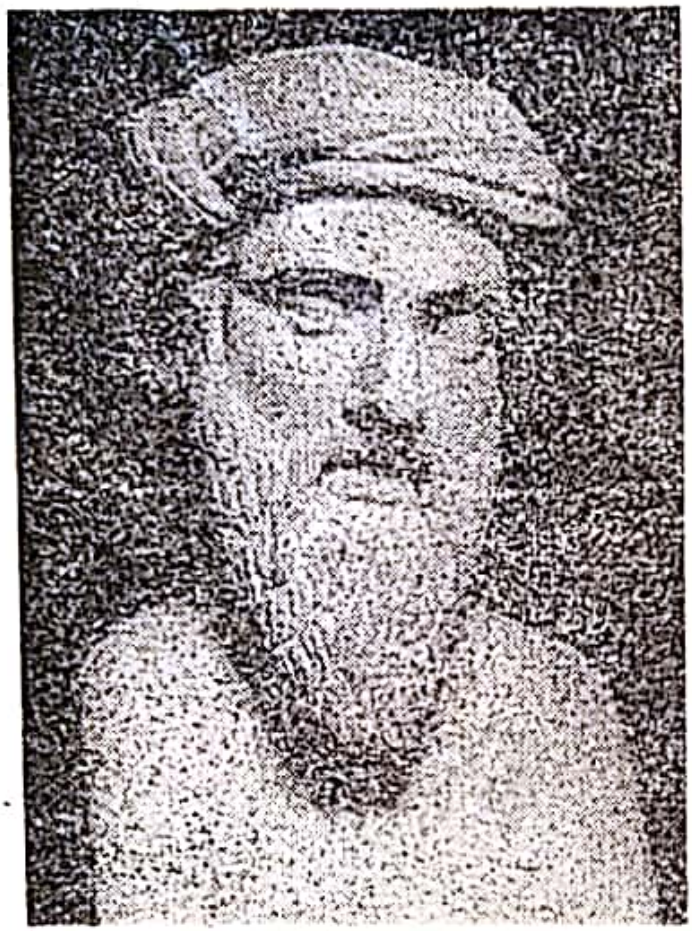
Prima demonstrație a incomensurabilității între diagonala unui pătrat și latura sa (adică a lui $\sqrt{2}$) a fost cu siguranță opera lui Pitagora*. Metoda nu se mai cunoaște, dar după părerea lui Paul Tannery, un profund cunoscător al istoriei matematicilor, stabilirea iraționalității lui $\sqrt{2}$ a putut fi obținută fie pe cale geometrică, fie prin considerații muzicale (4). Referindu-se la iraționalitatea lui $\sqrt{2}$, Aristotel face aluzie la o demonstrație aritmetică a iraționalității, bazată pe faptul că „parul" nu poate fi egal cu „imparul". Această demonstrație, prin reducere la absurd, se află în cartea a X-a a *Elementelor* lui Euclid**.

După stabilirea incomensurabilității cu unitatea a lui $\sqrt{2}$, Theodor din Cirene (sec. V. î. e. n.) a dovedit pe cale geometrică și incomensurabilitatea față de unitate a mărimi-

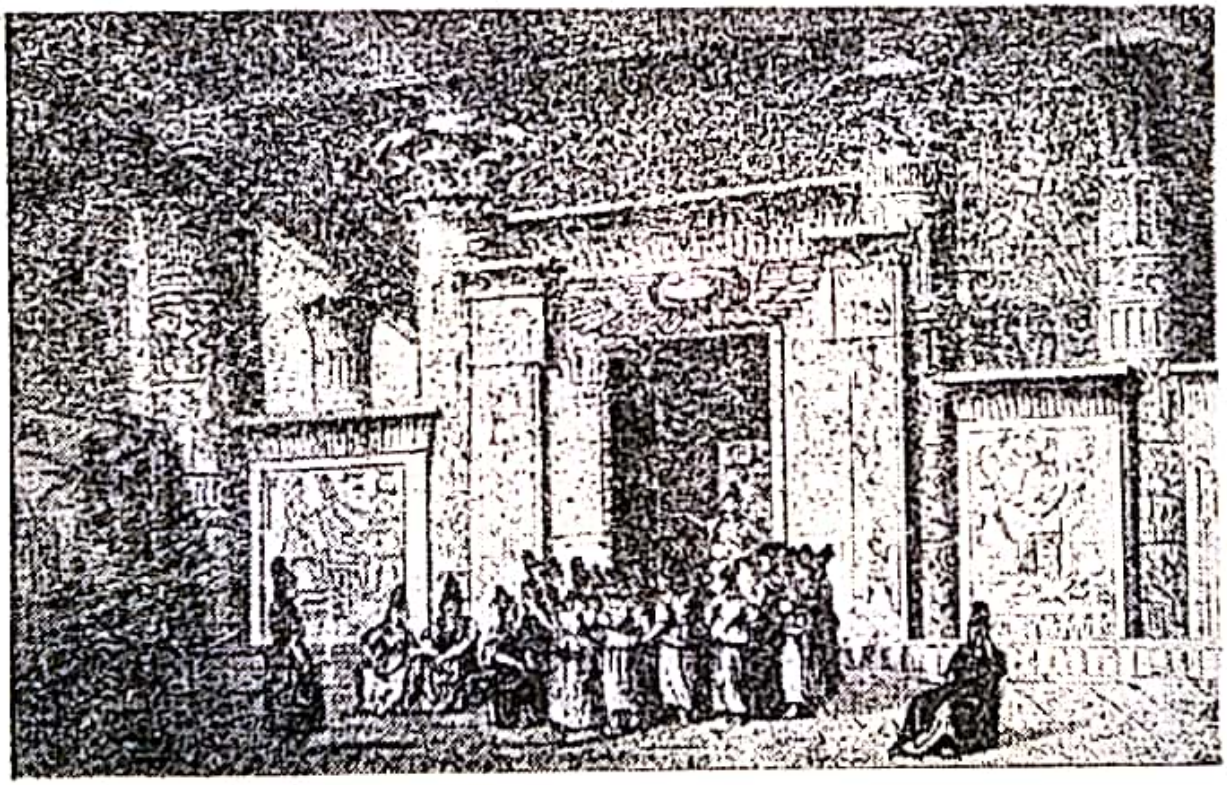
---

* Pe vremea lui Platon această demonstrație devenise așa de binecunoscută, încît se spunea: „Cine nu știe că diagonala unui pătrat este incomensurabilă cu latura lui, nu-i demn de numele de om".

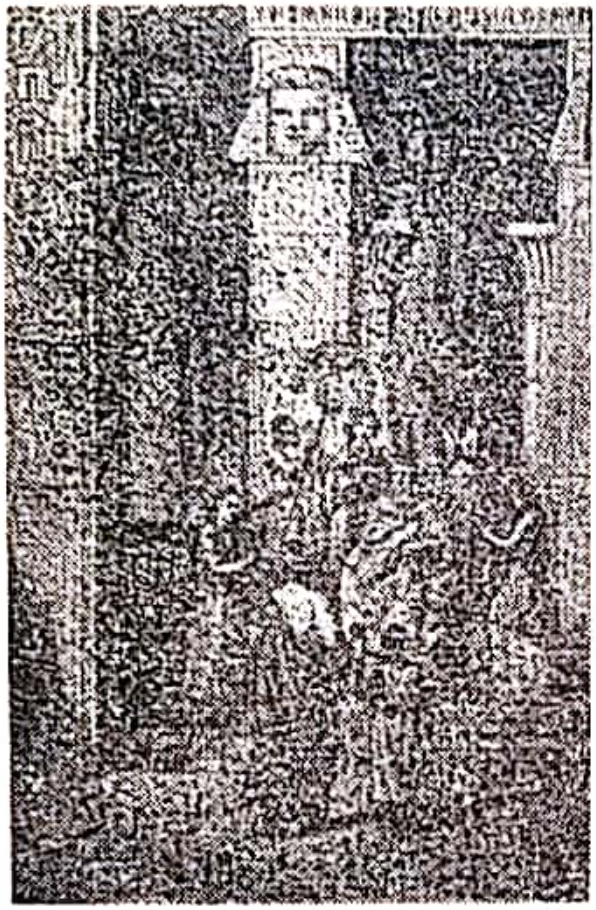
** Iată demonstrația dată de Euclid: Considerăm că $\sqrt{2} = \frac{A}{a}$, adică se exprimă printr-o fracție ireductibilă $\frac{A}{a}$, unde A și a sînt numere naturale. Ridicînd la pătrat rezultă $A^2 = 2a^2$. Aceasta arată că A este un număr par, fie deci $A = 2b$, numărul b fiind întreg. Înlocuind avem: $2b^2 = a^2$. Dar de aici rezultă că și a este un număr par, ceea ce contrazice ipoteza, căci în acest caz $\frac{A}{a}$ nu mai este fracție ireductibilă.



Pitagora



Pitagora printre învățații egipteni



Euclid prezintă „Elementele" lui Ptolemeu I Soter

lor $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ... pînă la $\sqrt{17}$. E foarte probabil că pentru $\sqrt{3}$ demonstrația să se fi bazat pe stabilirea raportului dintre latura și diagonala unui cub. Cît despre $\sqrt{5}$, el era strîns legat de „numărul de aur": $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, care apărea în construcția laturii pentagonului regulat (5). Proprietățile acestui poligon, studiate în școala lui Pitagora, au sugerat, probabil, și alegerea pentagonului regulat stelat ca semn de recunoaștere pentru membrii acestei secte. Pitagoreicii au de altfel meritul de a fi figurat în mod geometric, fie prin lungimea unui segment rectiliniu, fie printr-o arie sau volum, o mărime oarecare, rațională sau irațională.

Platon (sec. IV î. e. n.) afirma că alt elev al lui Teodor din Cirene, Teetet (sec. IV. î. e. n.), s-a ridicat pînă la *concepția generală a mărimilor incomensurabile*. Într-adevăr, Teetet a stabilit, în mod geometric, o clasificare a mărimilor iraționale, introducînd, în afară de segmentele incomensu-

rabile ca $\sqrt{a}$ (a, număr natural), și expresii mai complicate, ca de pildă $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ (a, b, c, d fiind numere naturale). Cercetările lui Teetet au fost continuate de Euclid (sec. III. î. e. n.) și se găsesc în cărțile X și XIII ale *Elementelor* lui. Rezultatele stabilite de Euclid se sprijină pe admirabila teorie a proporțiilor, imaginată de Eudoxus din Cnidos (sec. IV î. e. n.). E vorba de generalizarea, pentru mărimile comensurabile și incomensurabile, a teoriei rapoartelor și proporțiilor, considerată pînă la Eudoxus valabilă numai pentru numerele naturale (6). Trebuie să precizăm însă că Euclid s-a mărginit numai la iraționalele care apar din construcțiile cu rigla și compasul, pe atunci singurele instrumente admise pentru desenarea figurilor geometrice. Prin urmare, nu-i vorba de altfel de numere iraționale decît de rădăcinile pătrate ale numerelor naturale, nu pătrate perfecte. Aceste numere apăreau ca soluții ale ecuațiilor pătrate, bi sau chiar tripătrate cu coeficienți raționali, ecuații ce se introduceau de obicei prin teorema lui Pitagora.

Asemenea probleme, care puteau fi rezolvate cu rigla și compasul, au fost numite de greci : *probleme plane*. Ele au fost bine cunoscute încă din mijlocul secolului al V-lea î. e. n. de către pitagoreici. Paul Tannery citează următorul comentariu al lui Proclus (sec. I î. e. n.) : „După Eudem, ni se spune că parabola, hiperbola și elipsa* ariilor sînt descoperiri vechi, datorită muzei pitagoreicilor. De aici au fost luate aceste numiri ca să fie date conicelor, zicîndu-li-se uneia parabolă, alteia hiperbolă și celei de a treia elipsă, pe cînd pentru acei oameni divini de demult, semnificarea acestor termeni apărea din construcțiile plane ale ariilor pe un segment determinat. Dacă se consideră segmentul întreg și pe el se construiește aria dată, se spune că se face *parabola ariei*, dacă aria depășește segmentul este *hiperbola*

* Cuvîntul grec *parabolă* înseamnă *aplicație*. Așadar, prin parabola ariilor se înțelege *procesul de construire a unui dreptunghi de arie dată pe un segment dat*, sau, folosind limbajul lui Eudem, *aplicarea ariei segmentului dat*. Aplicarea ariei putea fi făcută încă și *hiperboli* (adică prin exces) sau *eleipsis* (adică prin lipsă) față de segmentul dat.

ariei şi dacă e inferioară segmentului este *elipsa ariei*, o parte din segment rămînînd atunci în afara ariei construite" (7).

Acest mare grup de *probleme plane* au un caracter comun, acela că mărimea iraţională care intervine, deşi nu poate fi exprimată aritmetic prin raportul a două numere naturale, se poate totuşi construi geometric, cu ajutorul riglei şi al compasului. Azi, după ce Descartes ne-a pus la dispoziţie *geometria analitică*, e uşor să înţelegem că orice construcţie cu rigla şi compasul este echivalentă cu operaţiile ce se fac între ecuaţii de gradul întîi (linia dreaptă) şi ecuaţii de gradul al doilea (cercul).

Dacă matematicienii greci s-ar fi limitat numai la problemele plane, ei ar fi putut înfrunta destul de uşor scandalul provocat de numerele iraţionale. Dar faptele s-au dovedit a fi cu mult mai grave, căci în problemele ce le-au abordat, ei au întîlnit alte iraţionalităţi care sfidau pînă şi metoda geometrică, aceea de a fi determinate printr-o construcţie cu rigla şi compasul. Astfel, chiar din secolul al V-lea î. e. n. se întîlnesc probleme ale căror soluţii conduceau la rezolvarea unor ecuaţii de gradul al treilea sau al patrulea, ori la ecuaţii nealgebrice. Încercările desperate de a găsi soluţiile unor asemenea probleme, folosindu-se rigla şi compasul, au eşuat. În schimb, ele au condus la alte descoperiri geometrice extrem de ingenioase, care au deschis larg orizontul ştiinţei matematicilor. Pentru aceasta merită să fie amintite aici următoarele probleme, care s-au bucurat de o faimă deosebită: „problema duplicării cubului", „problema trisecţiei unghiului" şi „problema cvadraturei cercului". Azi ele mai poartă şi numele de: *cele trei mari probleme ale antichităţii*.

Prima şi cea mai simplă dintre *problemele insolubile* cu rigla şi compasul este duplicarea cubului sau *problema delică*. Numirea din urmă are la origine următoarea legendă: Odată, Atena a fost bîntuită de o ciumă cumplită, care nu se mai potolea. De aceea a fost consultat oracolul din insula Delos. În răspunsul dat de însuşi Apollo, atenienii sînt sfătuiţi să dubleze altarul cubic din templul consacrat lui. Dar deşi au construit deîndată un alt altar, cu o muchie

de două ori mai mare, flagelul continua cu o și mai mare putere. Desperați, au întrebat din nou oracolul, care, drept răspuns, i-a sfătuit „să studieze mai profund geometria".

Înțelegînd că altarul construit de ei era de fapt de 8 ori și nu de 2 ori mai mare decît cel inițial, atenienii s-au adresat geometrilor, propunîndu-le să găsească soluția potrivită.

În formă algebrică, problema de mai sus conduce la rezolvarea ecuației cubice $x^3 = 2a^3$, unde prin x s-a notat muchia cubului cu un volum de două ori mai mare decît a cubului de muchie a.

Privită geometric, problema cere ca paralelipipedul de volum $2a^3$, adică avînd muchiile a, a și $2a$, să fie transformat într-un cub de muchie x. Rezolvînd ecuația $x^3 = 2a^3$ avem :

$$x = \sqrt[3]{2} \cdot a.$$

Astfel grecii au întîlnit pentru prima oară o mărime irațională, exprimată prin rădăcina cubică a unui număr natural. Așadar, un alt tip de iraționalitate decît acela provenit din aplicarea teoremei lui Pitagora (care conducea la extragerea rădăcinei pătrate dintr-un număr natural).

Hipocrate din Chios (sec. V-lea î. e. n.) a dat prima soluție teoretică a problemei, arătînd că ea se reduce la o dublă proporție geometrică. Anume, introducînd o mărime ajutătoare y, el formează următoarele două medii proporționale din care se poate stabili ecuația dată : $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$.

De aici $x^2 = ay$ și $2a^2 = xy$, iar prin împărțire : $\frac{x^2}{2a^2} = \frac{a}{x}$.

Dar acest fel de a pune problema nu constituia și dezlegarea ei practică, ci numai o transformare a ei în alta, tot așa de insolubilă, căci nimeni nu reușea să construiască cu rigla și compasul cele două medii proporționale y și x. Primul matematician care a găsit o soluție a problemei în mod practic a fost pitagoreicul Arhitas din Tarent (sec. IV î. e. n.), profesorul lui Eudoxus. El a determinat cele două medii proporționale prin intersecțiile dintre trei suprafețe de rotație, dintre care două erau cilindrice și a treia un con.

Aşadar, soluţia era găsită, folosindu-se o curbă cilindrică şi una conică. O atare soluţie se numea pe atunci *mecanică*, căci în dezlegarea problemei nu se întrebuinţau instrumentele de rigoare : rigla şi compasul. După spusele lui Plutarch, Arhitas ar fi construit el însuşi un instrument numit *mezograf*, cu care să se poată desena aceste curbe complicate. Soluţia găsită de Arhitas, deşi perfectă, nu i-a satisfăcut pe matematicienii greci contemporani şi nici pe cei de mai tîrziu, căci ei căutau o rezolvare a problemei după cerinţele clasice, adică folosind rigla şi compasul.

Necunoscînd relaţiile dintre linii şi ecuaţii şi deci nebănuind adevărata cauză a eşecului, matematicienilor greci li se părea destul de curios faptul că latura unui pătrat de arie dublă se putea construi cu rigla şi compasul, iar latura unui cub de volum dublu nu, cu toate că problemele păreau întru totul analoage. Ei atribuiau nereuşita numai lipsei lor de dibăcie, aşa că, deşi cele mai agere minţi dădeau acestei probleme soluţii uluitor de frumoase, ele nu erau luate în consideraţie, fiindcă dreapta şi cercul refuzau să ia parte la competiţie!

Printre soluţiile de această natură existau două, propuse de Menechmus, matematician grec din secolul al IV-lea î. e. n., care rezolvau problema cu ajutorul conicelor*, odată prin intersecţia dintre o parabolă şi o hiperbolă, iar a doua oară prin intersecţia dintre două parabole.

A doua dintre problemele celebre prin imposibilitatea de a fi soluţionată cu *rigla şi compasul* este aceea a *trisecţiei unghiului*, adică a împărţirii unui unghi dat în trei părţi egale.** Deşi la prima vedere problema nu părea să fie prea

---

* Prin curbe sau secţiuni conice se înţeleg următoarele trei curbe : elipsa, hiperbola şi parabola. Ele provin din intersecţia unui con circular drept avînd generatoarele prelungite în ambele sensuri cu un plan înclinat faţă de generatoare sau axa lui (elipsa), paralel cu axa (hiperbola), paralel cu generatoarea (parabola).

** Problema a fost generalizată astfel : „Să se împartă un unghiu într-un raport oarecare dat, trisecţia fiind astfel cazul particular cînd raportul este $\frac{1}{3}$".

dificilă, fiindcă un unghi se divide imediat cu rigla și cu compasul în două, patru, opt și orice multiplu al lui doi de părți egale, trisecția conducea, ca și duplicarea cubului, la o ecuație de gradul 3. Într-adevăr, se știe din trigonometrie că, dîndu-se un unghiu a, cosinusul lui este legat de cosinusul treimei acestui unghi, prin următoarea formulă în care apare și puterea a treia a cosinusului:

$$\cos^3 \frac{a}{3} = \frac{3}{4} \cos \frac{a}{3} + \frac{1}{4} \cos a.$$

Notînd $\cos a = p$ și $\cos \frac{a}{3} = x$ se formează ecuația

$$x^3 - \frac{3}{4} x - \frac{1}{4} p = 0.$$

Matematicienii greci, care nu bănuiau că rigla și compasul pot rezolva numai probleme legate de ecuațiile cu coeficienți raționali de gradul întîi și al doilea, sau provenind din combinații de acest fel de ecuații, au încercat să le folosească și în alte împrejurări (8). În cazul acestei probleme, grecii au inventat chiar un procedeu, folosind, în mod aparent numai, rigla și compasul, executînd astfel trisecția unghiului. În realitate metoda, numită de unii istorici a *intercalării*, de alții a *alunecării*, folosea rigla nu numai pentru a trage drepte, ci și pentru a măsura distanțele și iată cum:

Fie ABC unghiul care trebuia împărțit în trei părți egale (fig. 5). Un cerc cu centrul în B taie cele două laturi ale unghiului în A și C, și prelungirea lui AB, dincolo de B, în D. După ce se marchează pe riglă distanța BC (raza cercului), se așază rigla în așa fel ca să treacă prin punctul C, iar una din extremitățile segmentului să alunece pe semidreapta BD pînă ce a doua extremitate a segmentului atinge cercul. Notînd cele două puncte de pe riglă cu E și F, avem: EF = BC = FB. Așadar, triunghiul EFB este isoscel și

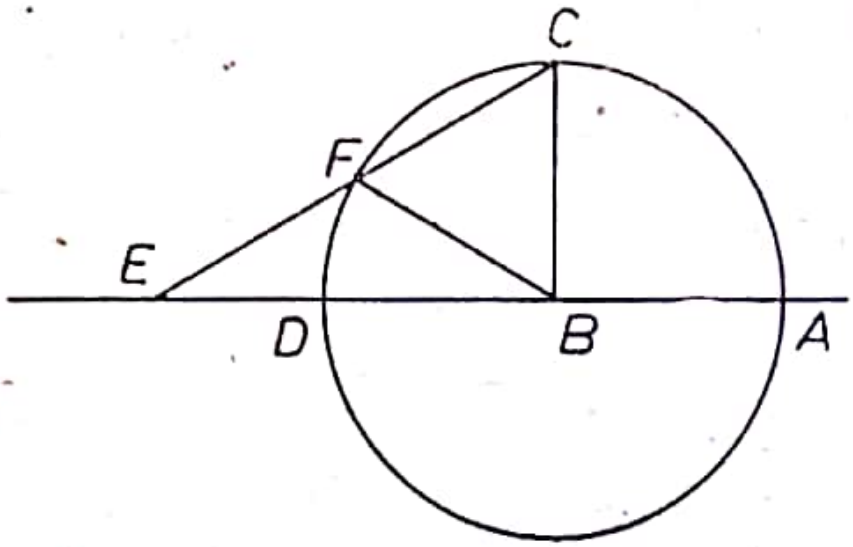


Fig 6

$\sphericalangle E = \sphericalangle B = F^{D}$, dar $\sphericalangle E = \dfrac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{FD}}{2} = \overset{\frown}{FD}$, deci

$$\overset{\frown}{FD} = \frac{\overset{\frown}{AC}.}{3}$$

Deşi problema a fost rezolvată, folosindu-se numai rigla şi compasul, metoda nu a fost acceptată ca bună, căci ea contrazicea regula obişnuită de folosire a riglei numai pentru a uni două puncte şi nu de a transporta distanţele, prin alunecarea ei.

Arhimede

Tot în aceeaşi problemă, Hippias din Elis (sec. V-lea î. e. n.) a folosit o curbă descoperită de el, numită mai tîrziu *cvadratrice*. Prin ea, el a realizat nu numai trisecţia unghiului, ci şi împărţirea lui într-un raport oarecare dat. În istoria matematicilor, această curbă apare ca primul exemplu de o linie generată în mod cinematic. Dar ea nu-i şi singura curbă imaginată pentru a dezlega problema trisecţiei unghiului. Am putea aminti din nou de hiperbolă sau prezenta spirala lui Arhimede, ori încă şi altele.

Dar despre aceste curbe se va discuta mai pe larg în capitolul următor, cu ocazia celei de a treia problemă faimoasă : a cvadraturii cercului.

GEOMETRIA GREACĂ ȘI CVADRATURA CERCULUI

De la greci încoace, cine spune matematică spune demonstrație. Unii chiar se îndoiesc că s-ar mai putea întîlni demonstrații în sensul precis și riguros pe care acest cuvînt l-a primit de la greci și în afara domeniului matematicilor. . .

N. BOURBAKI

Nici o problemă din istoria matematicilor n-a cunoscut atîta celebritate ca problema cvadraturii cercului. Pentru nici o altă problemă nu s-a dat, timp de secole, o luptă mai aprigă, nu s-a consumat atîta energie. Și niciodată nu se va ști prin ce calitate anume a reușit ea să atragă în așa măsură atenția matematicienilor și chiar a nematematicienilor!

Problema cvadraturii cercului se prezintă sub două aspecte diferite: *primul posibil*: problema calculării ariei cercului (și implicit a lungimii lui) în mod aproximativ, și al *doilea imposibil*: problema construirii cu rigla și compasul al unui pătrat de arie *exact egală* cu al unui cerc dat (sau al unui segment de dreaptă *precis egal* cu lungimea unui cerc dat).

Sub ambele aspecte, problema a fost cercetată încă din secolul al VI-lea î. e. n. de Pitagora și elevii lui. În notele lui Proclus despre Euclid se menționează că pitagoreicii ar fi reușit cvadratura cercului, dar nu se dă nici un amănunt asupra metodei lor. Se mai știe, de asemenea, că Anaxagora din Clazomene (sec. V î. e. n.), profesorul și prietenul lui Pericles și unul dintre ultimii filozofi ai școalei ioniene, ar fi scris, în jurul anului 437, pe cînd se afla în închisoare*, o

* Anaxagora din Clazomene fa fost condamnat la închisoare pentru impietate, căci în timpul cursurilor sale de filozofie afirma că Soarele nu-i altceva decît o uriașă piatră incandescentă, iar Luna nu are lumină proprie, ci o reflectă pe aceea a Soarelui.

lucrare — azi pierdută — despre cvadratura cercului. Dar sub primul ei aspect, adică acela de a calcula efectiv, în mod aproximativ, aria unui cerc, problema aparţinea aritmeticii practice (logistica) şi nu prezenta interes pentru geometrii greci. De aceea, e foarte probabil că, încă din secolul al V-lea î. e. n., a existat printre auditorii diverselor şcoli filozofice preocuparea de a construi în mod geometric un pătrat *de arie exact egală cu a unui cerc dat, folosind numai rigla şi compasul.* În comedia *Păsările*, Aristofan (sec. V î. e. n.) îşi bătea joc de un contemporan al său, Meton, de altfel astronom renumit, pentru că pretindea că a reuşit să transforme, numai cu rigla şi compasul, cercul în pătrat. Aceasta arată în mod indiscutabil că, sub cel de al doilea aspect al ei, problema depăşise de pe atunci cadrul îngust al preocupărilor matematice, răspîndindu-se în public. De aici înainte, problema va fi privită numai în acest mod.

Informaţii mai precise şi preţioase se găsesc în lucrările lui Hippocrat din Chios (sec. V î. e. n.), care a încercat şi el să rezolve problema cvadraturii cercului, cu rigla şi compasul. În acest scop, el a demonstrat şi teorema fundamentală: „cercurile sînt între ele ca patratele diametrilor". Demonstraţia a fost restabilită de Euclid în Cartea a XII a *Elementelor**. În paralel, Hippocrat a descoperit şi faptul că este posibilă cvadratura unor *lunule*, cu rigla şi compasul. Aceste figuri geometrice sînt asemănătoare secerii Lunei, de unde le-a venit şi numele. Ele sînt formate din două arce de cerc cu aceleaşi extremităţi şi concavitatea îndreptată în acelaşi sens (fig. 6). Sprijinindu-se pe teorema demonstrată, Hippocrat a construit trei feluri de lunuli cvadrabile, adică lunuli pentru care a reuşit să construiască, numai cu rigla şi compasul anumite poligoane echivalente lor. Acestea sînt:

1 — Lunula ABCD, mărginită în exterior de un semicerc şi în interior de un arc de cerc descris pe diametrul lui, a cărui rază se determină astfel: în semicercul ABCD (fig. 7) se

---

* Teorema a doua.

Fig. 6

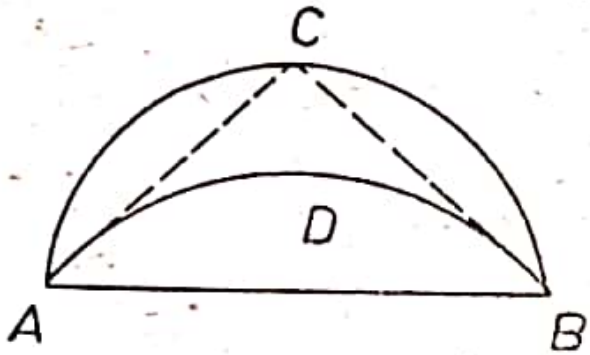


Fig. 7

înscrie un triunghi dreptunghic și isoscel ACB. Arcul AB are ca rază una dintre catete AC = CB ale acestui triunghi.

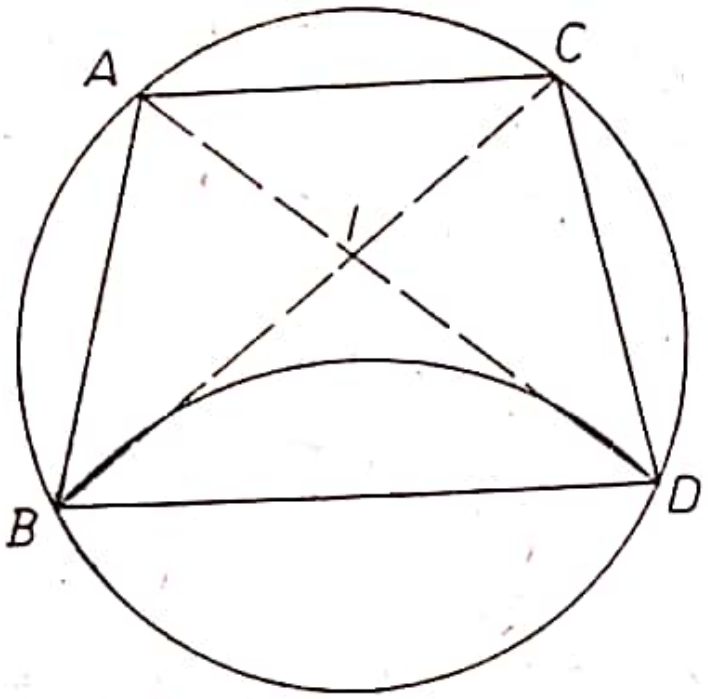
2 — Lunula ABCD, al cărui arc exterior este mai mare decît un semicerc, se determină de trapezul inscriptibil ABCD, în care AB = AC = CD și $BD^2 = 3AC^2$ (fig. 8).

3 — Lunula cu arcul exterior mai mic decît un semicerc, determinată de un alt trapez ABCD, inscriptibil în așa fel ca AB = BC = CD și, numind I punctul de intersecție al diagonalelor, să existe relația : $DI^2 = \frac{3}{2} DC^2$ (tot fig. 8).

În primul caz, Hippocrat a arătat că aria lunulei este egală cu aceea a triunghiului dreptunghic isoscel ABC. În cazul al doilea, că lunula este echivalentă cu trapezul ABCD și, în cazul al treilea, că aria lunulei ABCD (fig. 9), adăugată la aceea a cercului de rază OT, este egală cu aria triunghiului isoscel ABC înscris în lunula ABCD, plus aria hexagonului înscris în cercul OT.

Dar cvadratura lunulelor nu înseamnă același lucru ca și cvadratura cercului, deși unii autori din antichitate au afirmat că Hippocrat ar fi folosit aceste teoreme asupra lunulelor ca să stabilească prin ele cvadratura cercului. Hippocrat nu

Fig. 8



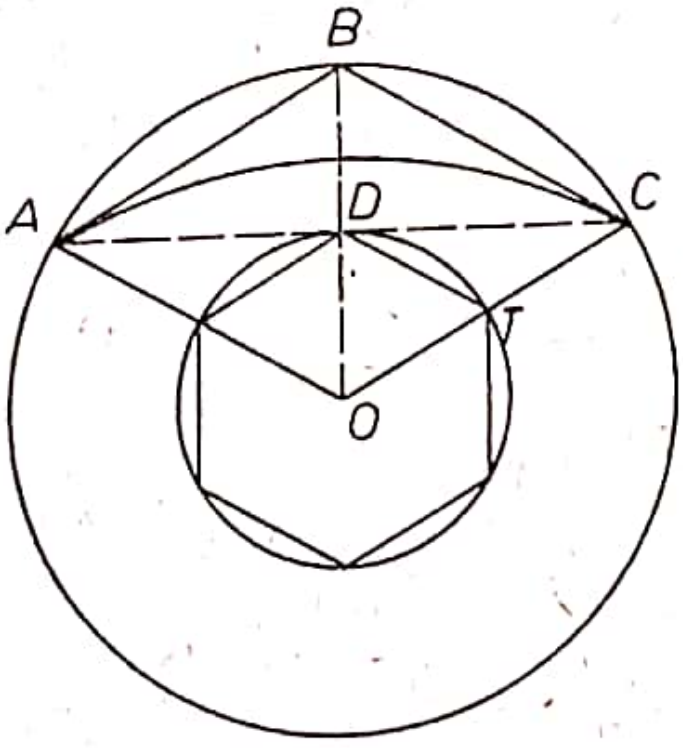


Fig. 9

a stabilit și cvadratura altor lunule în afară de ale acestora trei, iar Paul Tannery a arătat că „este incontestabil că Hippocrat nu a încercat să reducă cvadratura cercului la aceea a lunulelor". Ar rezulta deci că afirmația amintită era gratuită și se întemeia pe faptul că Hippocrat apărea

ca cel mai adînc cunoscător al rezultatelor geometrice de pe vremea lui. Şi, într-adevăr, el compusese, aşa cum va face şi Euclid mai tîrziu, o carte denumită tot *Elemente*, care s-a pierdut, cuprinzînd o expunere a tuturor teoremelor demonstrate pînă la el. Desigur că şi pe Hippocrat l-a tentat, ca şi pe atîţia matematicieni mai vechi sau contemporani, problema cvadraturii cercului cu rigla şi compasul. Însă cultura lui matematică nu-i putea permite să tragă concluzii generale din rezultatele particulare pe care le-a stabilit arătînd că există cazuri de figuri curbilinii, ale căror arii se lăsau exprimate prin arii de poligoane. Necunoscînd nici el cauza imposibilităţii cvadraturii cercului, el a lăsat problema fără răspuns, spre deosebire de mulţi alţi matematicieni greci care s-au îndîrjit să-i afle soluţia, bazîndu-se pe faptul că se puteau stabili soluţii ale problemei de îndată ce se renunţa la folosirea riglei şi a compasului.

Dar, ca şi în cazul celorlalte două probleme amintite mai înainte, tocmai în aceste soluţii „mecanice", care nu-i satisfăceau atunci pe geometrii greci, s-a dovedit măiestria şi genialitatea talentului lor matematic. Astfel, au fost descoperite multe curbe importante care se puteau construi fie prin puncte, fie printr-o trăsătură continuă al unui alt instrument, născocit în acest scop, sau care se defineau prin intersecţia a două suprafeţe curbe. Aceste curbe cu proprietăţi geometrice remarcabile au fost numite *cvadratrice*, deoarece toate aveau proprietatea comună de a furniza o coardă, a cărei lungime *să fie exact egală* cu latura pătratului echivalent unui cerc de rază dată.

Prin asemenea curbe cvadratrice, problema cvadraturii cercului era teoretic rezolvată, fiindcă se putea determina lungimea unei coarde egală cu latura pătratului echivalent unui cerc, însă practic lungimea acelor coarde nu putea fi măsurată cu rigla şi compasul, deoarece însăşi curbele respective nu se puteau construi cu rigla şi compasul, ci în „mod mecanic", cum se spunea pe atunci, aşa că *practic*, problema cvadraturii rămînea tot nerezolvată.

Prima curbă *cvadratrice* a fost descoperită de sofistul Hippias din Elis (sec. V î.e.n.). După Pappus (sec. III),

Banchetul celor 7 înțelepți ai Greciei antice

ea se definea astfel: se consideră patratul ABCD (fig. 10), în care latura AB, privită ca rază a unui cerc cu centrul în A, se rotește uniform începînd din AB pînă în AD. În același timp, și dreapta BC se deplasează uniform și paralel cu ea însăși, așa fel ca să ajungă în AD deodată cu AB. Cvadratricea este locul punctelor de intersecție (T) dintre aceste două drepte (9). P. Tannery (1.c) observa că aceasta „pare să fie prima curbă după cerc care a fost studiată de un

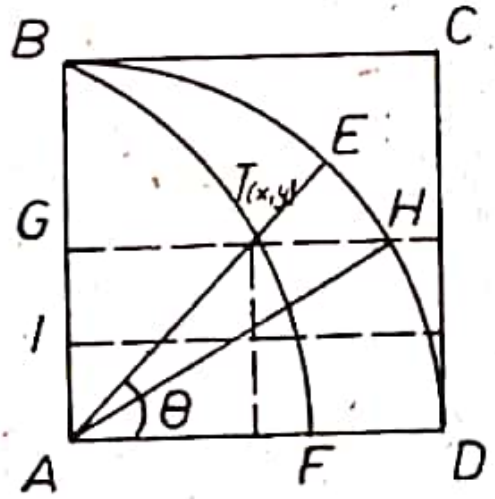


Fig. 10

geometru grec". După cum am amintit, Hippias a folosit această curbă pentru a face trisecția unghiului, fără a bănui că ea are și proprietatea de a rezolva cvadratura cercului. Acest fapt a fost demonstrat, cu un secol mai tîrziu, de către Dinostrate (sec. IV î.e.n), fratele lui Menechmus (10).

Despre alte soluții ale cvadraturii cercului prin curbe cvadratrice amintește sirianul Iamblic (sec. IV), originar din Calcida, într-un comentariu: „Arhimede a obținut-o cu ajutorul liniei helicoidale, Nicomede cu ajutorul aceleia căreia i se spune chiar cvadratrice, Apollonius printr-o linie pe care el o numea *sora cochloidei* și care este la fel cu aceea a lui Nicomede, Carpos cu ajutorul unei linii pe care a numit-o cu *dublă mișcare*".

Linia helicoidală, la care face aluzie Iamblic, este cunoscută azi sub numele de spirala lui Arhimede. Ea a fost definită într-o lucrare scrisă de Arhimede, intitulată *Despre helicoide*, care s-a păstrat pînă azi.

Arhimede a numit curba „helix", această denumire fiind folosită în antichitate pentru orice curbă răsucită, plană sau strîmbă. În particular acesteia i-a spus *helicea plană*, ca astfel să o deosebească de *helicea strîmbă cilindrică*.

Spirala lui Arhimede se definește ca locul unui punct A, care se mișcă în mod uniform pe o dreaptă OA, în timp ce dreapta se rotește uniform în jurul unui punct fix O, de unde pornește punctul A (fig. 11). Chiar Arhimede a dovedit că dacă P este un punct al primei spire și se consideră cercul cu centrul în O de rază OP, atunci lungimea segmentului OT, numit subtangentă polară*, este egală cu arcul de cerc ASP. De asemenea, dacă P_1 este extremitatea primei spire complete, lungimea cercului de rază OP_1 este egală cu lungimea OT_1 a subtangentei în P_1 și, în general, lungimea subtangentei OT_n este de *n* ori lungimea cercului de rază OP_n (11).

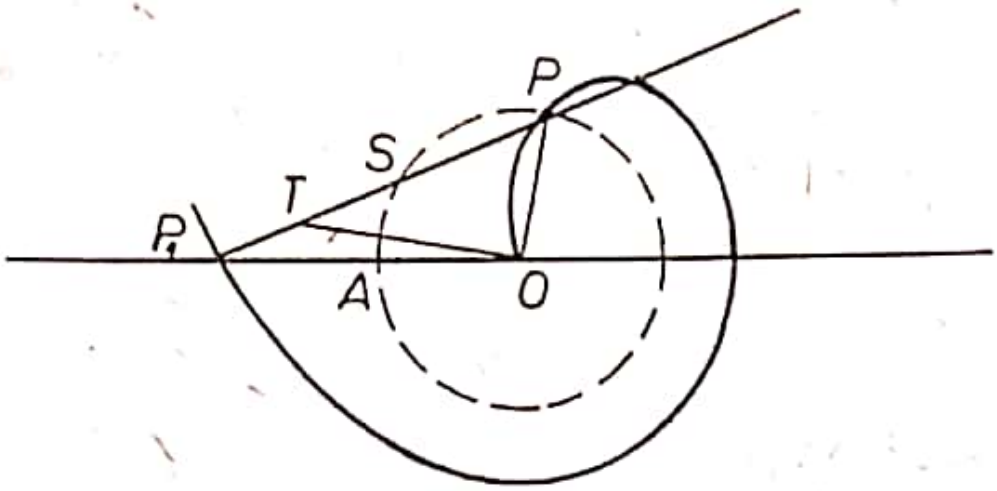
Folosind acest rezultat și aplicînd metoda exhaustiunei**. Arhimede a arătat că, aria cuprinsă între semidreapta ini-

---

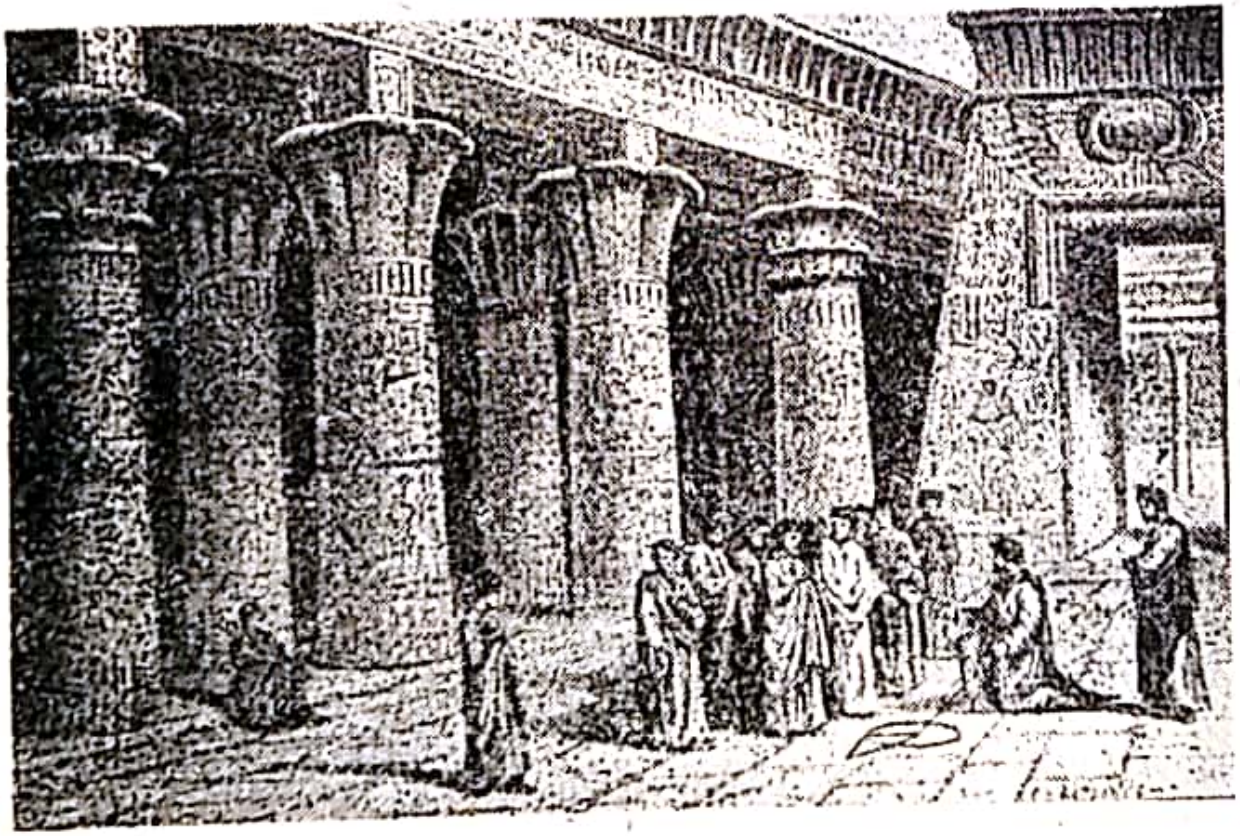
* Dacă PT este tangenta la spirală în P, și OT este perpendicul ara în O pe raza vectoare OP, atunci OT este subtangenta polară.

** Nota 16.

Fig. 11



ţială OA şi prima spiră este egală cu $\frac{1}{3}$ din aria cercului de rază OA, apoi că aria inelului ce se formează cînd raza vectoare descrie a doua spiră este în raport de $\frac{7}{12}$ faţă de aria cercului de rază $OB = 4\pi a$ etc. (12).

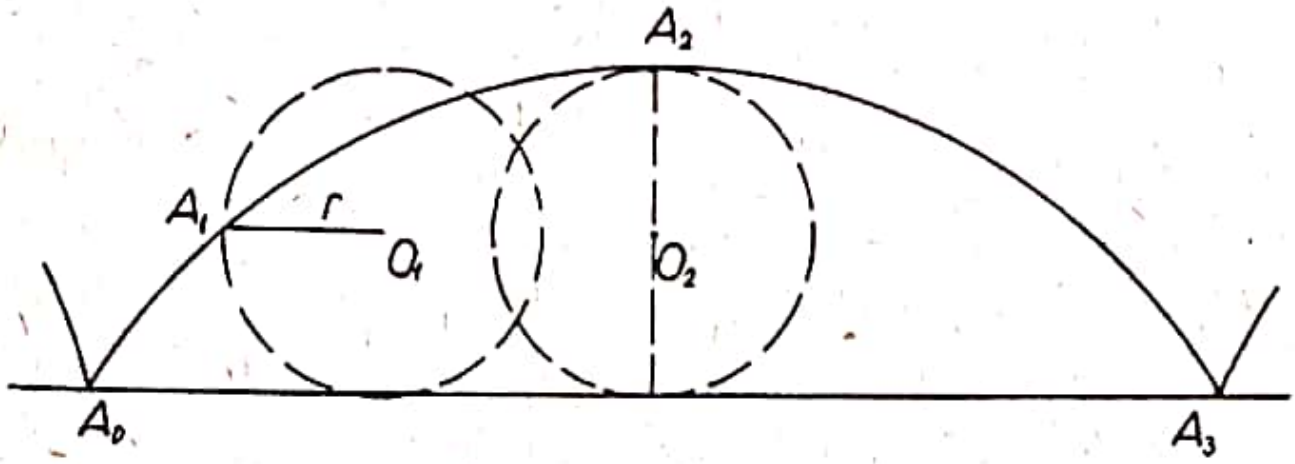


Apollonius în Muzeul din Alexandria

Blaise Pascal

Despre curba numită de Apollonius *sora cochloidei* nu a rămas nici un fel de indicaţii care să permită identificarea ei. T. Heath presupune că ea ar putea fi elicea cilindrică, dat fiind că Apollonius a scris despre helice o carte, azi pierdută, intitulată *Cochilias*. Se crede că în această carte Apollonius ar fi discutat şi despre maşina folosită de Arhimede la ridicarea apei, adică despre şurubul fără sfirşit, cum numeau grecii şurubul lui Arhimede. Iar Arhimede, deşi le-a studiat,

Fig. 12



nu a scris nici despre suprafețele helicoidale și nici despre helicea cilindrică.

Dacă teoria helicei cilindrice ar fi fost stabilită de Apollonius în cartea menționată de Pappus și de alți comentatori, atunci s-ar explica și termenul de *soră a cochloidei* prin aceea că ea ar fi purtat același nume ca și curba inventată de Nicomede pentru rezolvarea trisecția unghiului și duplicarea cubului (13).

Cu privire la curba cu *dublă mișcare*, folosită de Carpos din Antiochia,, matematician despre care azi nu se mai știe nimic — probabil să fi trăit prin secolul I sau II al erei noastre — P. Tannery sugerează că ea ar putea fi *cicloida*, „a cărei generare atît de simplă nu a putut rămîne neobservată de cei vechi".

Cicloida descrisă începînd din secolul al XV-lea de cardinalul de Cusa și de mulți alții, printre care și de Pascal, a fost studiată de Iacob Bernoulli în tratatul său de calcul diferențial, din 1698. Curba se definește ca locul geometric al unui punct de pe un cerc de rază r, care se rostogolește uniform și fără alunecare pe o dreaptă (fig. 12). Ea este formată din arce succesive $A_0 A_1 A_2 A_3$, . . .), iar coarda care subîntinde un arc complet are lungimea egală cu aceea a cercului generator : $A_0A_3 = 2\pi r$. Așadar, folosind cicloida, se poate obține un segment de dreaptă egal cu lungimea cercului și astfel se poate din nou rezolva cvadratura cercului. Dar bineînțeles că numai în mod teoretic, fiindcă și în acest caz, ca și în celelalte, condiția de a se folosi rigla și compasul nu-i îndeplinită, deoarece cicloida nu se poate construi decît prin puncte sau prin mișcări mecanice.

În încheiere, credem că este oportun să considerăm mai îndeaproape aceste descoperiri în legătură cu curbele prin care s-a încercat rezolvarea problemei cvadraturii cercului, precum și celelalte probleme ce se arătau nerezolvabile cu rigla și compasul.

Mai întîi, trebuie să observăm că, deși grecii nu au avut la îndemînă un instrument de cercetare atît de perfect cum este azi geometria analitică , ei au reușit în mod surprinzător

Moartea lui Arhimede

să caracterizeze și să clasifice curbele descoperite de ei, întocmai ca și matematicienii din epoca modernă.

Astfel, Proclus subliniază faptul că: „Atunci cînd se ocupau de linii curbe, matematicienii greci aveau obiceiul să le dea *caracterul**". Și tot el a mai adăugat: „Pornind de la cele două specii mai simple și primordiale, linia dreaptă și cercul, Platon a dedus din combinarea lor toate celelalte curbe, ca acelea ce se numesc helicoidale; ele sînt fie plane, fie generate în jurul corpurilor solide. De asemenea, și alte specii de linii ce provin din intersecția corpurilor solide".

Iată, deci, o informație care dovedește afirmația de mai sus. O alta, la fel de prețioasă, este aceea că geometrii greci

* Noțiunea corespunde cu ceea ce numim azi ecuația unei curbe.

grupau problemele în trei categorii diferite, după natura curbelor folosite în rezolvarea lor și anume în :

1 — *probleme plane*, adică acelea care se pot rezolva numai cu ajutorul dreptei și a cercului sau cu rigla și compasul ;

2 — *probleme solide*, care necesitau una sau mai multe secțiuni conice ;

3 — *probleme gramice sau liniare*, în a căror soluție apăreau curbe mai complexe și mai greu de construit (fiindcă nu se mai putea folosi rigla și compasul). De exemplu : curbele spirale, cvadratricele și altele.

Nu mai rămîne nici o îndoială că aceste ingenioase clasificări au pregătit calea lui Fermat și Descartes spre descoperirea structurii intime a curbelor și punerea la punct a metodei coordonatelor.

Spre onoarea geometrilor greci din antichitate, trebuie amintit și faptul că, deși ei nu au putut demonstra că problema cvadraturii nu se putea încadra printre problemele plane, ei au așezat-o exact — cum s-a demonstrat abia în secolul al XIX-lea — *printre problemele gramice sau liniare*, termenul de geometrie liniară avînd alt sens decît cel actual, echivalent cu *geometria afină*.

REZULTATELE LUI ARHIMEDE ÎN PRIVINȚA CVADRATURII CERCULUI

În infinita complexitate a lucrurilor există anumite corespondențe traductibile în formule simple, pe care spiritul nostru le poate pricepe ușor.

JULES TANNERY

Matematicienii greci nu au capitulat ușor în fața rezistenței mereu crescînde, opusă de problema cvadraturii cercului. Alături de rezultatele obținute, folosind curbele cvadratrice, ei au stabilit și altele, tot așa de remarcabile, bazîndu-se pe o metodă în principiu cu totul diferită de aceea a curbelor cvadratrice.

Astfel, Antifon, sofist atenian din veacul al V-lea î.e.n., a propus o soluție bazată pe înscrierea poligoanelor regulate în cerc. Anume, ca să găsească aria cercului el a înscris întîi un triunghi echilateral, apoi, împărțind arcele subîntinse de laturile lui în cîte două părți egale, a înscris hexagonul și a continuat procesul, prin șirul poligoanelor, avînd un număr tot mai mare de laturi : 12, 24 . . . sau în general : 3.2^n ($n = 1, 2, 3, . . .$) (fig. 13). Prin acest procedeu el susținea că se poate ajunge la un poligon care să se confunde cu cercul. Ori, întrucît un poligon este cvadrabil, în sensul că totdeauna se poate construi cu rigla și compasul un pătrat de arie egală cu al acestuia, rezultă că proprietatea se transmite și cercului !

În metoda propusă de Antifon nu-i greu de constatat influența școalei egiptene sau a altor popoare din Orientul antic unde, aria cercului se calcula prin aria unui poligon, de obicei a hexagonului înscris în cerc. Desigur că el a făcut un pas înainte, căutînd să treacă de la aproximația ariilor,

la egalitatea lor, prin presupusa coincidenţă dintre cele două figuri : a poligonului înscris şi a cercului.

Altă soluţie, de aceeaşi natură, a fost propusă, cîteva decenii mai tîrziu, de Bryson din Heraclea, discipol din şcoala lui Pitagora. El afirma că poate stabili cvadratura cercului cu ajutorul patratului înscris şi circumscris cercului. Căci, dacă aria cercului este mai mare decît a pătratului înscris în el şi mai mică decît a celui circumscris, trebuia să existe, credea el, un alt pătrat, cuprins între acestea două, de arie egală cu a cercului (fig. 14).

În procedeele folosite de Antifon şi Bryson recunoaştem o anticipare a aceluia folosit azi, în mod curent, atunci cînd e vorba de calcularea ariilor suprafeţelor mărginite de linii curbe : dar geometrii greci de atunci nu au acceptat aceste idei. Menţionîndu-le în *Fizica* sa, Aristotel scria că ele nici nu merită să fie criticate, deoarece nu sînt alta decît nişte paralogisme, adică vorbe goale, fiindcă se bazau pe simple afirmaţii. El a mai adăugat că , Antifon şi Bryson desfideau principiile specifice ale geometriei, căci „în geometrie nu ai dreptul să aplici o ipoteză căreia nu i s-au determinat limitele între care ea rămînea valabilă".

Fig 13

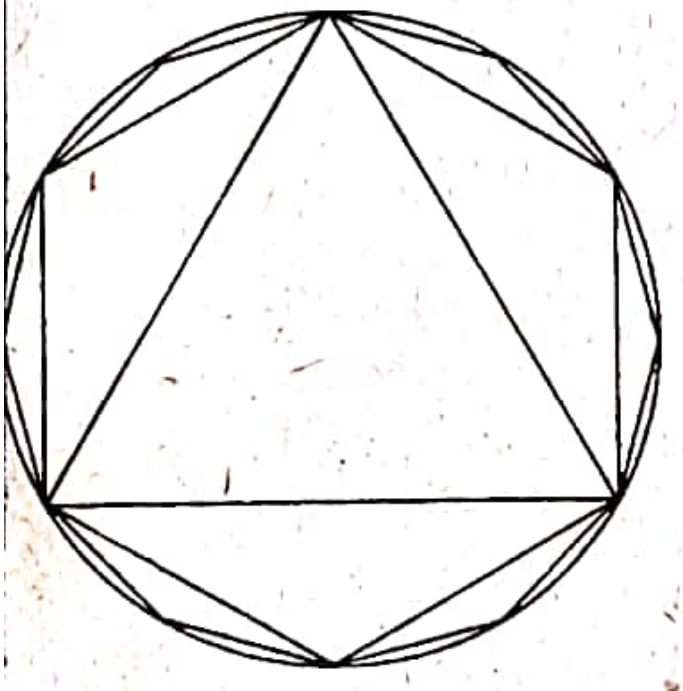
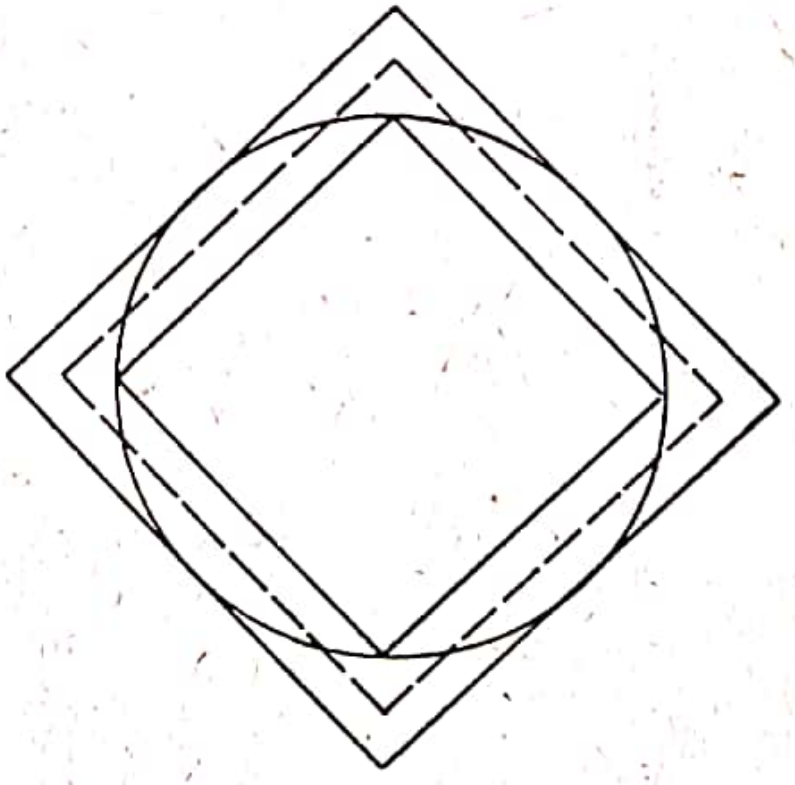


Fig. 14



Aristotel făcea astfel aluzie la o problemă destul de spinoasă pe atunci, aceea despre „continuitatea și divizibilitatea infinită a liniilor". Potrivit acestei ipoteze, geometrii greci considerau că oricît de mic ar fi un segment de dreaptă, el păstrează cele două extremități ale lui și deci că nu se poate confunda niciodată cu un punct. În consecință, cît de mică ar deveni latura poligonului înscris, ea rămînea o coardă ce tăia arcul de cerc în două puncte distincte și de aceea nici un poligon înscris nu se putea confunda cu un cerc.

Așa că, din punctul lor de vedere, matematicienii-filozofi de atunci, în frunte cu Aristotel, erau îndreptățiți să privească cu neîncredere aceste soluții, mai ales că nici Antifon și nici Bryson nu dovediseră, în prealabil, existența unor poligoane de arie egală cu a unui cerc, prin nici un fel de construcții geometrice (14) și nici nu indicaseră vreo metodă care să pemită calcularea laturei sau a ariei poligoanelor presupuse a deveni egale cu cercul. Ei nu au făcut altceva decît să

Aristotel, acuzat de impietate, se exilează singur din Atena

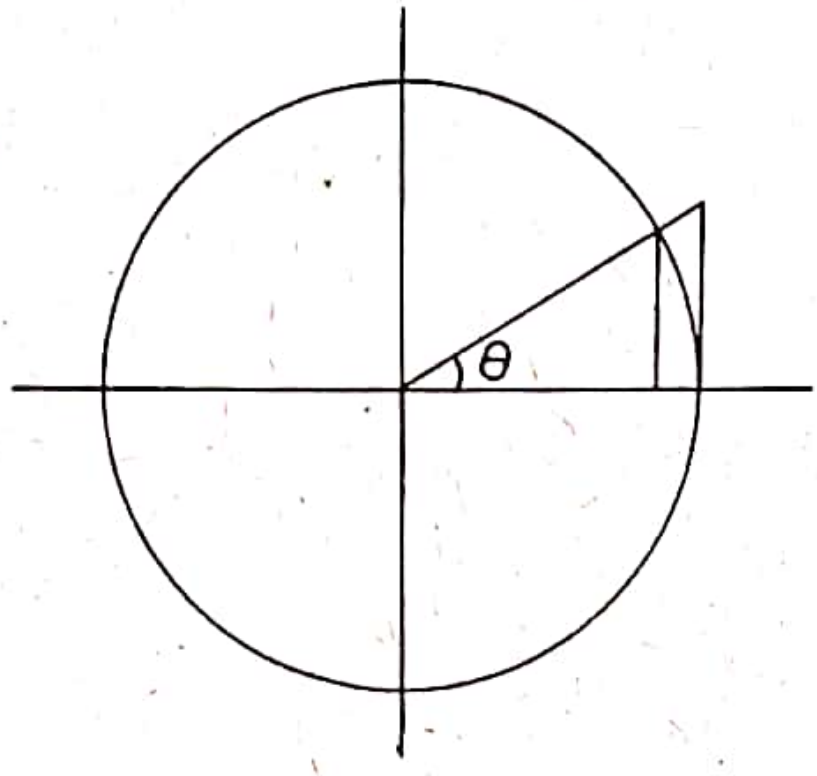
Claudiu Ptolemeu

sugereze o atare posibilitate, or atîta nu putea satisface exigența matematicienilor greci. Totuși, deși procedeele lor au fost combătute principial, ideea existenței unei strînse legături dintre cerc și poligoanele înscrise și circumscrise lui a prins chiar de pe atunci rădăcini și folosind-o, s-a stabilit dubla inegalitate, exprimată azi, astfel : $\sin 0 < 0 < \operatorname{tg} 0$ (fig.15). Ea arată că lungimea cercului este cuprinsă între perimetrul unui poligon înscris și a altuia, cu același număr de laturi, circumscris lui. Această relație a condus și la o primă aproximație a numărului π, adică a raportului dintre lungimea cercului și a diametrului său, anume

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} \qquad (15)$$

Un secol mai tîrziu această aproximare devenea insuficientă, ea ne mai putînd satisface cerințele geodeziei și ale astronomiei. Anume, atunci cînd (în sec. III î.e.n.) Eratostene a început măsurarea lungimii meridianului pămîntesc dintre Siena și Alexandria. El a mai căutat și o modalitate de a stabili un nou calendar, ale cărui date

Fig. 15



s ă corespundă în mod real cu anotimpurile. În ambele aceste l ucrări era necesară o cunoaștere cît mai precisă a valorii n umărului π.

Aceste fapte l-au determinat poate pe Arhimede, contemporan și chiar prieten cu Eratostene, să caute o soluție a cvadraturii cercului. În scrierea rămasă de la el și intitulată *Măsurarea cercului*, se găsesc următoarele trei teoreme, prin care se dezlegau, pentru cine putea înțelege, firele așa de încîlcite ale acestei probleme. Iată conținutul lor:

1 — Aria unui cerc este egală cu aceea a unui triunghi dreptunghic, care are drept catete raza și lungimea cercului.

2 — Rapotul dintre aria cercului și a patratului circumscris lui diferă foarte puțin de $\frac{11}{14}$.

3 — Raportul dintre lungimea cercului și a diametrului său este cuprins între $3\frac{10}{71}$ și $3\frac{1}{7}$, adică există neegalitatea:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Prima teoremă stabilea o metodă precisă de a calcula aria cercului. Mai bine zis, o amintea și o difuza, căci, după

cum am văzut, ca era cunoscută mai de demult, cel puțin de către Dinostrate. Prin Arhimede, formularea ei căpăta însă o importanță deosebită, căci această teoremă reducea aria cercului la calcularea lungimii lui. Cu alte cuvinte, de acum înainte se stabilea o echivalență între *problema cvadraturii* cercului și aceea a *rectificării** lui , în sensul că rezolvarea, în condițiile cerute (adică folosind numai rigla și compasul), a uneia dintre ele, conducea și la rezolvarea celeilalte și invers : imposibilitatea de a se stabili rectificarea cercului însemna, totodată, și imposibilitatea cvadraturii lui.

A doua teoremă ar fi trebuit, de fapt, să urmeze după a treia, fiindcă în cea de a treia teoremă se stabilesc limitele între care se cuprinde raportul dintre lungimea cercului și diametrul său. Or, era necesar să se cunoască acest raport înainte de a-l găsi pe acela dintre aria cercului și a pătratului circumscris lui ! Ca să deducă teorema a treia, Arhimede s-a bazat pe ideile lui Antifon și Bryson, adică a legat lungimea și aria cercului de perimetrul și aria unui șir de poligoane regulate, înscrise și circumscrise cercului. Dar Arhimede a mers mai departe decît acești doi matematicieni. Mai întîi pentru că nu a afirmat și nici nu a căutat *coincidența* dintre poligoane și cerc, ci numai *posibilitatea de a le aproxima* Și apoi, pentru că el a stabilit o metodă practică de determinare a unor valori aproximative atît pentru lungimea, cît și pentru aria cercului. Ca să ajungă la aceste rezultate Arhimede a pornit de la laturile triunghiurilor regulate înscrise și circumscrise unui cerc și a continuat dublarea, numărului de laturi ale acestor poligoane inițiale pînă a ajuns la poligoanele cu 96 de laturi, cărora le-a calculat perimetrul.

Arhimede nu a dat nici un detaliu asupra metodelor lui de calcul, ci a menționat doar limita inferioară și superioară, între care se afla cuprinsă rădăcina pătrată a lui 3 :

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

---

* Prin *rectificarea* unei curbe închise sau a unui arc de curbă se înțelege determinarea lungimii acelei curbe sau a acelui arc de curbă.

Calculînd perimetrele celor două poligoane, Arhimede a avut posibilitatea să limiteze valoarea raportului dintre lungimea cercului și a diametrului său și să-i determine, astfel, primele două zecimale corecte, ceea ce în notația noastră revine la a scrie $\pi = 3{,}14$. Cu această valoare, după ce a calculat aria pătratului circumscris cercului, a dovedit teorema a doua, aplicînd *metoda exhaustiei*, inventată de Eudoxus (16). Anume, el a arătat că diferența dintre aria pătratului circumscris cercului și aria pătratului pe care a calculat-o el, folosind această valoare a numărului π, poate fi făcută mai mică decît o mărime foarte mică, dinainte dată (17). Nu este de mirare că Arhimede nu a arătat mai îndeaproape metoda de calcul pe care a folosit-o, ca să determine lungimile laturilor poligoanelor cu 96 laturi (18). Pe vremea lui, cei mai mulți dintre matematicienii greci erau atrași numai de speculațiile teoretice, fie ele din domeniul geometriei sau al aritmeticei. Iar calculele și metodele de a le efectua nici nu făceau parte din aceste domenii, ci formau un capitol aparte din domeniul matematicilor elementare-practice, numit *logistică*. Spre deosebire de aceștia, Arhimede a folosit rezultatele stabilite de el în mod teoretic, la multe probleme de natură practică. Prin aceste trei teoreme care l-au condus la o soluție practică a problemei cvadraturii cercului, Arhimede a atins, din punct de vedere teoretic, o înălțime ce nu va putea fi depășită timp de peste două milenii, de alte descoperiri similare din acest domeniu. Aceasta pentru că, pe de o parte, Arhimede a demonstrat riguros că aria cercului poate fi încadrată între ariile a două poligoane — unul înscris cercului și altul circumscris lui astfel ca diferența dintre aceste arii să poată fi făcută cu atît mai mică cu cît numărul laturilor acelor două poligoane este mai mare — și, pe de altă parte, pentru că existența acestui rezultat aproximativ, deși nu se afirma încă deschis, alunga speranța de a se mai găsi o construcție, cu rigla și compasul prin care să se stabilească cvadratura exactă a cercului. cu alte cuvinte prevestea imposibilitatea ei.

După afirmațiile lui Heron din Alexandria (sec. I î.e.n.) aflate în *Metrica*, Arhimede ar fi continuat calculele și ar

fi ajuns la o valoare exprimabilă azi prin 4 zecimale exacte ale numărului π (19).

Pappus (sec. III) susținea că Arhimede ar fi scris un tratat mai vast cu titlul *Despre lungimea cercului* și că *Măsura cercului* ar reprezenta numai o parte a acestuia. Informația pare să corespundă realității. Opera, deși unică în genul ei, nu a putut fi apreciată atunci la adevărata ei valoare de către contemporani, dat fiind natura ei practică și probabil că de aceea s-a și pierdut. Singurele teoreme care s-au păstrat au fost acelea ce au prezentat interes pentru geodezie și astronomie (20).

Problema cvadraturii cercului l-a condus pe Arhimede să pună și să rezolve o problemă cu mult mai generală, anume calcularea ariei unei alte suprafețe plane, mărginită de o altă linie curbă — parabola. Această problemă va fi pe deplin dezlegată abia în epoca modernă, după ce se va fi descoperit calculul diferențial și integral, anticipat tocmai de acest rezultat (21).

Cît de bine a înțeles Arhimede importanța și valoarea descoperirii sale se poate afla din scrisoarea către prietenul său Dositeu, căruia i-a trimis această lucrare. Extragem din ea următorul pasaj: „Printre cei ce au cultivat geometria înaintea noastră, unii au vrut să stabilească cum se poate afla o suprafață rectilinie egală cu un cerc sau cu un segment de cerc. Dar nu știu să fi existat vreun singur om, care să fi căutat să afle aria cuprinsă între o dreaptă și o parabolă, ceea ce am făcut noi acum. Căci noi vom dovedi că un segment oarecare cuprins între o dreaptă și o parabolă este egal cu de patru ori o treime din triunghiul care are aceeași bază și aceeași înălțime ca a segmentului"*.

Un nou răspuns la problema cvadraturii cercului se desprinde din aceste rînduri. Anume că, dacă pentru segmentul de parabolă cvadratura este posibilă, — căci s-a putut

---

* Nota 17.

găsi un anumit triunghi a cărui arie să o exprime pe a acestuia, — pentru un cerc nu există un asemenea triunghi sau un poligon echivalent. Deci, cvadratura cercului, cu rigla și compasul *nu-i posibilă*, așa după cum este posibilă cvadratura unui segment de parabolă.

NUMERELE IRAȚIONALE ÎN MATEMATICILE DIN ORIENTUL ÎNDEPĂRTAT ȘI MIJLOCIU

Pentru progresul științei este indispensabil ca lucrurile să pară la început simple. . . se poate spune că eroarea este uneori utilă și că, în epocile cu adevărat creatoare, un adevăr necomplet sau aproximativ poate fi mai fecund decît același adevăr întovărășit de restricțiile necesare.

E. PICARD

Ca și în Grecia antică, popoarele din Orientul îndepărtat au fost atrase de anumite probleme matematice pe care le-au dezvoltat potrivit cu specificul mentalității și civilizației lor. Cercetările făcute în această direcție au arătat că, de prin mileniul al doilea î.e.n., existau în India și în China centre, unde se desfășura activitatea matematică. Aici nu ne vom ocupa decît de metodele folosite de acești matematicieni din Orientul îndepărtat ca să rezolve problema ariilor figurilor mărginite de linii plane. Deși, rezultatele obținute de ei par mai puțin spectaculoase decît acelea elaborate de geometrii greci, ele nu sînt mai puțin valoroase. Căci prin ele s-a deschis o cale directă și naturală către generalizarea noțiunii de număr.

După cum s-a văzut, pentru greci noțiunea de număr se limita la aceea de număr natural. Atît fracțiile cît și numerele iraționale, — ca acelea provenite, de exemplu, din considerarea laturilor unui triungi dreptunghic etc. — erau privite ca *mărimi* geometrice și deci erau considerate că sînt segmente de linie dreaptă sau de curbă, arii sau volume, dar, în nici un caz nu erau privite ca numere. Matematicienii hinduși și chinezi, care aveau o predilecție deosebită pentru numere și calcule, nu au făcut nici o deosebire între numerele întregi și cele fracționare iar mai tîrziu între acestea și numerele iraționale. Au privit toate aceste categorii de

numere, fără a face vreo deosebire între ele, și le-au aplicat aceleași reguli de calcul, fără a se întreba măcar dacă, era permis sau nu, să se procedeze așa. Cu o asemenea problemă puteau să se ocupe alții, mai tîrziu. Deocamdată ei făcuseră o descoperire senzațională, de neconceput pentru grecii din antichitate, aceea că numerele se înfățișau sub formă de întregi și de neîntregi. În felul acesta, ei nu au fost obligați să caute anumite segmente sau alte mărimi geometrice care să corespundă numerelor fracționare sau iraționale. Ei au transmis generațiilor viitoare, ca pe un fapt bine stabilit, ideea că numerele nu sînt întotdeauna întregi, ci se pot prezenta și sub formă fracționară sau irațională, toate numerele avînd aceleași reguli de calcul, independent de înfățișarea lor. Mai puțin exigenți decît grecii, pe ei nu i-a preocupat faptul că operațiile aritmetice nu erau definite decît pentru numerele întregi, dar prin această lipsă de rigoare în raționamentul lor, ei au făcut pasul decisiv, singurul necesar atunci, acela de a lărgi noțiunea de număr (22).

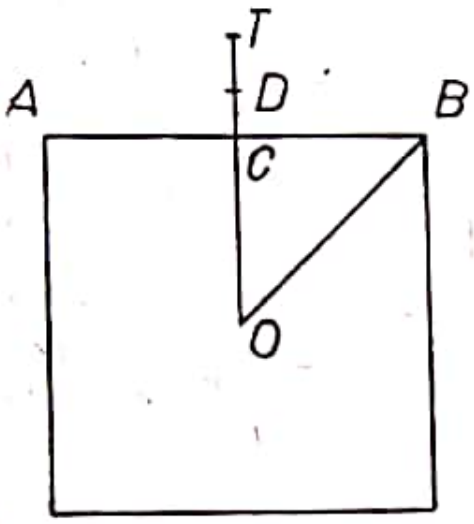
În *Suliva-Sutra* (Regulele funiei), una dintre cărțile hinduse cele mai vechi, scrisă probabil în primul mileniu î.e.n., se găsesc discuții atît asupra lui $\sqrt{2}$, cît și asupra numărului π. Aceste numere derivau din problemele legate de modificarea suprafeței unui altar, fie impunînd să i se păstreze forma mărindu-i aria, fie, din contra, păstrîndu-i aria dar schimbîndu-i forma. Pentru $\sqrt{2}$ s-a stabilit valoarea aproximativă :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

ceea ce dă $\sqrt{2} = 1{,}4142157$ în loc de $\sqrt{2} = 1{,}4142136$ (23). În această valoare a lui $\sqrt{2}$, ca și în folosirea fracțiilor cu numărătorul 1 se întrevede, în mod cert, influența babiloniană.

În ce privește cvadratura cercului, se găsesc în *Suliva-Sutra* probleme relative la transformarea patratului în cerc și a cercului în patrat, tratate numeric și bineînțeles aproximativ. Este chiar foarte interesant de remarcat faptul că, în unele dintre aceste probleme, deși inverse una alteia, formulele

Fig. 16



prin care se calculează valoarea lui π nu conduc la acelaşi rezultat. De pildă, într-o problemă asupra transformării patratului în cerc, diametrul „d" este dat de formula :

$d = \left(1 + \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right) p$, în care „p" este latura patratului.

Construcţia cercului respectiv se obţine astfel : fie O centrul patratului (fig. 16) şi OT = OB, unde OT este perpendiculară pe AB. Dacă se ia pe OT segmentul $CD = \frac{1}{3}$ CT, atunci OD este raza cercului. După cum se vede, soluţia este aproximativă şi din indicaţiile date se deduce : $OT = \frac{\sqrt{2}}{2} p$;

$CT = \frac{\sqrt{2}-1}{2} p$; $OD = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right) p$ adică :

$d = \left(1 + \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right) p$. Efectuînd calculul rezultă :

$\pi = 18\,(3 - 2\sqrt{2}) \simeq 3{,}08$.

Într-o altă problemă, în care se cerea „transformarea cercului în patrat", se indica o altă regulă : „Împarte diametrul în 15 părţi, scoate două, ceea ce rămîne este latura patratului". Aşadar : $p = \frac{13}{15} d$, deci $\pi = \frac{676}{225} \simeq 3{,}004$.

Ambele valori ale numărului π sînt mai puțin precise decît aceea stabilită de egipteni. Ar putea fi o dovadă că ele au o origine cu mult mai veche. În secolul al V-lea, Aryabhatta folosește valoarea $\pi = 3{,}1416$ ca să construiască o tabelă de sinusuri. Nu s-ar putea afirma cu siguranță că această valoare nu ar fi de origine grecească. Chiar așa fiind, trecerea de la tabela de coarde, folosită de greci, la tabela de sinusuri calculată pentru prima dată de către hinduși, rămîne totuși o contribuție originală și dintre cele mai remarcabile din domeniul trigonometriei, datorită matematicienilor hinduși, contribuție prin care se subliniază aptitudinile lor practice. În mod explicit, ei nu au definit decît funcția *sin x*, dar au folosit în mod curent și funcția *tg x*, sub numele de *umbra gnomonului*. Și, fapt surprinzător, ei au descoperit dezvoltarea în serie a tangentei unui arc și chiar a funcției *arc tg x*. Aceste rezultate se află, fără nici o demonstrație sau explicație suplimentară, în lucrarea lui Nilakanta, scrisă prin jurul anului 1501 în versuri și intitulată *Culegerea științifică*. De pildă, iată următoarea regulă, care cuprinde dezvoltarea în serie a funcției arc tg x: „Ia un arc de cerc astfel încît sinusul lui să fie mai mic decît cosinusul. Înmulțește sinusul arcului cu raza și împarte la cosinus. Aceasta va da prima cantitate. Înmulțește această cantitate cu patratul sinusului și împarte la patratul cosinusului și vei obține a doua cantitate. Repetă operația înmulțind cu patratul sinusului și împărțind la patratul cosinusului Cantitățile obținute împarte-le, în ordine, la numerele întregi impare 1, 3, 5,... Dacă la cea dintîi vei scădea și aduna alternativ cantitățile obținute, vei obține în cele din urmă arcul de cerc". Din aceste indicații rezultă formula:

$$r.x = \frac{r \sin x}{\cos x} - \frac{r \sin^3 x}{3 \cos^3 x} + \frac{r \sin^5 x}{5 \cos^5 x} - \ldots\ldots,$$

în care condiția $\sin x < \cos x$, adică $0 < x < \frac{\pi}{4}$, asigură convergența seriei.

Pentru $r = 1$ avem, evident:

(1) $x = \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \ldots\ldots$ Această serie și altele încă au fost folosite de hinduși ca să calculeze valoarea numărului π. De exemplu, din seria (1) pentru $x = \frac{\pi}{4}$ se obține:

(2) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + k_n$,

termenul corectiv k_n fiind exprimat în trei forme diferite (24). Tot în *Culegerea științifică* se găsește și seria mai rapid convergentă

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{1^5 + 4 \cdot 1} - \frac{1}{3^5 + 4 \cdot 3} + \frac{1}{5^5 + 4 \cdot 5} - \ldots\ldots\right),$$

prin care sepoate calcula de asemenea valoarea numărului π.

Sub forma de număr fracționar, π este exprimat prin

$\pi = \frac{104348}{33215}$, iar în fracția zecimală $\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 9$,

adică cu 10 zecimale exacte.

Puține sînt informațiile precise asupra adevăratei contribuții originale a matematicienilor chinezi din antichitate, căci după cum se știe foarte bine, în anul 213 î.e.n. au fost arse, din ordin împărătesc, aproape toate cărțile științifice. Cea mai veche culegere, *Matematica în nouă părți*, compusă probabil prin secolul al III-lea î.e.n., și comentată, după șase secole, de către Liu Huei (sec. III), cuprinde o aplicație interesantă a procedeului lui Arhimede pentru evaluarea numărului π. În locul poligonului cu 96 de laturi folosit odinioară de Arhimede, se consideră un altul, cu 3 072 de laturi și se află astfel o aproximație mai bună, anume $\pi = 3{,}14159$. Liu Huei observa că aproximarea obținută de el ar putea fi amelioratăă dacă s-ar folosi poligoane înscrise, cu un număr și mai mare de laturi. El sugera chiar că, mărind nedefinit numărul de laturi, perimetrul fiecărui poligon din acest șir s-ar apropia tot mai mult de cerc, avînd ca limită lungimea lui.

În secolul al V-lea, astronomul și matematicianul Tzu Ciun-Ciji (430—501) a depășit valoarea lui π de care se servea contemporanul său hindus Aryabhatta, stabilind primele 6 zecimale exacte ale numărului π, exprimate prin inegalitatea:

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

Mai mult chiar, el a exprimat acest rezultat și prin fracția $\frac{355}{113}$, identică pînă la a șasea zecimală cu numărul precedent:

$$\pi = \frac{355}{113} = 3{,}141592 \ldots$$

Pe lîngă aceste importante focare matematice, care existau în India și în China din timpurile străvechi, începînd din secolul al VIII-lea apar altele și în Orientul mijlociu. Acestea au ca limbă comună de exprimare pe cea arabă și, foarte curînd, ele își vor afirma chiar supremația. Astfel, în secolul al IX-lea, matematicienii de limbă arabă dispuneau nu numai de traducerile textelor hinduse, ci și de cele mai importante opere din știința greacă clasică, pe atunci aproape uitate în Europa. Excelenți matematicieni, ei au înțeles, au cultivat și au asimilat atît geometria greacă cît și aritmetica hindusă. În plus, prin sinteza acestor domenii, au creat capitole complet noi ale matematicilor, ca, de pildă acela al trigonometriei sau al algebrei. În cartea de algebră, intitulată *Al Fahri* a matematicianului Al. Karki (25), care a trăit la Bagdad prin secolul al XI-lea, se află o expunere sistematică a operațiilor cu numerele iraționale, bazată pe teoria proporțiilor lui Euclid și pe cercetările lui Diofant. El își baza raționamentele pe formulele exprimînd patratul și cubul binomului: $(a + b)^2$ și $(a + b)^3$. Asemenea probleme aveau mare importanță pentru matematicienii de limbă arabă, mai ales pentru astronomi, care urmăreau ca și hindușii să poată construi tabele de sinus și tangentă, cît mai precise. Or, această precizie necesita pe de o parte o bună aproximare a numărului π și pe de altă parte să se poată face interpolări cu numere iraționale.

Un contemporan al lui Al. Karki, Ibn al Haitam care aparţinea de şcoala din Cairo, a compus o carte despre problema cvadraturii cercului şi despre cvadratura lunulelor. În ultima problemă, el a depăşit rezultatele stabilite odinioară de Hippocrat, reuşind cvadratura unei lunule construită într-un caz cu mult mai general decît acela corespunzător triunghiului dreptunghic şi isoscel; anume, a stabilit cvadratura unei lunule corespunzătoare triunghiului dreptunghic oarecare. Însă, înşelat de intuiţie, acest mare învăţat, care s-a luat la întrecere chiar cu Arhimede, prin rezultatele stabilite cu privire la măsurarea volumului paraboloidului, a crezut că se poate obţine cvadratura cercului cu rigla şi compasul (26). Greşeala, comisă de el, avea la bază interpretarea dată raportului dintre două mărimi. Greşeala era posibilă în acea vreme cînd se cunoştea prea puţin despre natura numerelor iraţionale; ca să poată fi dat adevăratul răspuns, trebuiau să treacă încă multe secole.

Alt matematician, care şi-a scris operele în limbă arabă şi a arătat un mare interes numărului π, a fost persanul Al Biruni (973—1048). Dar, spre deosebire de Al Haitan, el era convins (tot fără a o putea dovedi) de imposibilitatea cvadraturii cercului, susţinînd că raportul dintre lungimea cercului şi diametrul lui, este un *număr iraţional*. Ca să stabilească o mai bună aproximaţie a lui π, el a considerat un poligon cu 720 de laturi. Totuşi, din cauza unei erori strecurată în tabela de sinusuri pe care o folosea în calcule, nu a reuşit să obţină aproximaţia la care se aştepta. Lucrul acesta a fost realizat cîteva secole mai tîrziu, de Djemşid al Kaşi, născut în Iran, pe la sfîrşitul veacului al XIV-lea. El a fost chemat să lucreze la Samarkand, unde a murit prin 1429. Al Kaşi a determinat valoarea lui π cu 17 zecimale exacte. Metoda folosită a expus-o în cartea *Tratat despre cerc*.

Ca şi Arhimede, Al Kaşi a calculat perimetrele poligoanelor regulate înscrise şi circumscrise cercului, însă felul în care a evaluat aproximările respective poartă pecetea originalităţii (27). Poligoanele de care s-a servit el aveau nu mai puţin de 3.2^{28}, adică 805 306 368 laturi! Calculele au fost efec-

tuate în sistemul sexagesimal, deoarece acesta era sistemul de numerație folosit în mod curent de astronomii arabi. Totuși, Al Kași nu s-a mulțumit numai cu expresia lui π în fracție sexagesimală, ci a transformat rezultatul în sistemul zecimal. El a găsit astfel valoarea : $2\pi = 6, 283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5...$ Prin transformarea făcută de Al Kași, apare, pentru prima oară, într-o operă scrisă în limba arabă, exemplul unui număr exprimat sub formă de fracție zecimală.

Nici problema trisecției unghiului nu a fost ocolită de arabi. Ea s-a impus tot din necesitatea de a avea tabelele trigonometrice din ce în ce mai precise. În acest scop, trebuiau evaluate valorile arcelor mici, ca de exemplu acelea ale sin 1°.

La început arabii au încercat, ca și odinioară grecii, să găsească o soluție geometrică a problemei trisecției unghiului, folosind rigla și compasul. Dar nereușind, au căutat, începînd din secolul al XI-lea, o soluție a problemei pe cale algebrică, traducînd problema într-o ecuație de gradul al treilea. Se spune că această ecuație ar fi fost rezolvată de către Al Biruni, dar nu se mai știe în ce fel. În schimb, s-a păstrat metoda folosită de Al Kași. Ea se bazează pe rezolvarea ecuației trigonometrice :

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

printr-un procedeu de *iterație* rapidă (28), obținînd valoarea sin 1°, cu aceeași exactitate ca și a numărului π, adică exprimată cu 17 zecimale exacte. Astfel, datorită lui Al Kași și colaboratorilor săi, la Observatorul astronomic din Samarkand, au existat pe la anul 1435 cele mai precise tabele trigonometrice din lume. Numai că, din cauza tulburărilor politice și sociale, acei fini și destoinici observatori nu au avut răgazul să se bucure în tihnă de roadele muncii lor.

Contribuția popoarelor asiatice din Orientul îndepărtat și mijlociu la problemele legate de numerele iraționale, merită să fie privită cu multă atenție. Mai întîi, prin cercetările lor s-a putut pătrunde mai adînc în structura intimă a noțiunii de număr. În plus, matematicienii arabi au și meri-

tul de a fi păstrat prin traducerile ce le-au făcut cele mai însemnate opere grecești și hinduse. Pe această cale au fost transmise și folosite mai tîrziu de matematicienii europeni. Tot matematicienii arabi au oferit europenilor, ca noi domenii de cercetare, trigonometria și algebra.

INTERESUL PENTRU CVADRATURA CERCULUI LA MATEMATICIENII DIN EUROPA OCCIDENTALĂ ÎN EVUL MEDIU

Științele, la fel ca și toate ființele, se întîmplă să cadă din vîrsta plină de forță a maturității și să moară îmbătrînite; renăscînd pentru o nouă existență, ele trec iar prin copilărie.

SOPHIE GERMAIN

Curios și ciudat ne apare și azi interesul pentru cvadratura cercului în Europa medievală, într-o vreme cînd cunoștințele matematice ale celor interesați erau așa de reduse, încît nici nu știau bine în ce constă sau cum se formulează această problemă! Nici că se poate da o mai bună caracterizare acestei epoci, decît aceea dată de Paul Tannery în articolul *Geometria în secolul al XI-lea*: „Acesta nu mai este un capitol din istoria științei, ci un studiu asupra ignoranței în care se găsea Occidentul cu puțin mai înainte de importarea matematicilor arabe".

Cercetările amănunțite făcute de Paul Tannery, de M. Curtze și de alții au arătat că, în prima jumătate a secolului al XI-lea, nu exista în Occidentul latin un învățămînt propriu-zis al geometriei și nici o sursă de unde s-ar fi putut scoate la lumină măcar cîteva noțiuni elementare de geometrie. Nimeni nu știa ce înseamnă *un unghi exterior* sau *un unghi interior unui triunghi*, acești termeni (29) fiind considerați sinonimi cu *unghiul obtuz* și cu *unghiul ascuțit*. Nimeni nu putea demonstra teorema despre suma unghiurilor dintr-un triunghi și nimeni nu știa cum se poate construi cu rigla și compasul media proporțională dintre două segmente date.

Ca dovadă a acestui nivel de cunoștințe în domeniul geometriei, Paul Tannery prezintă 8 scrisori, păstrate în manuscris, schimbate, prin anul 1025, între doi profesori și inspectori

școlari, unul din Colonia și celălalt din Liège, în care se pun întrebări și se dau răspunsuri la probleme ca acelea amintite mai sus. Corespondența este interesantă mai ales pentru că „ea nu reprezintă un schimb de păreri între doi prieteni, preocupați de aceleași probleme, ci fiindcă e vorba de un adevărat turnir în fața unui public, care urmărea și judeca loviturile, scrisorile nefiind scrise ca să fie citite numai în școlile din Colonia și din Liège...“.

Totuși, în aceste condiții aproape de neconceput, un reprezentant al școlii din Liège, pe nume Francon, a scris prin anul 1050 o lucrare în 6 cărți, intitulată *Despre cvadratura cercului*. Ca operă literară, lucrarea trebuie să fi avut un anumit răsunet (30), judecînd după stilul îngrijit și după natura neobișnuită a subiectului ales. Dar în ceea ce privește fondul matematic al operei, se poate constata că autorul nici nu bănuia care-i cu adevărat problema „cvadraturii cercului“. Probabil că această expresie de „cvadratură a cercului“ să fi circulat pe atunci printre clerici, căci Francon a dedicat lucrarea sa episcopului de Colonia, care, se pare, i-a și sugerat-o. Francon arată că în *Comentariile lui Boethius* asupra *Categoriilor* lui Aristotel, „cvadratura cercului“ era menționată ca exemplu de *problemă ce are o soluție posibilă dar necunoscută*. Această informație care îi asigura posibilitatea soluției, l-a îndemnat pe el, un pătimaș cercetător al geometriei, să o descopere. Francon știa să calculeze aria cercului aplicînd formula:

$$\text{Aria cercului} = \frac{11}{14} d^2$$

(unde d reprezintă diametrul cercului), pe care o găsise în cărțile de atunci. Dar el nu bănuia de loc că această formulă este aproximativă. Așadar — și-a spus Francon — „dacă aria cercului se poate *stabili exact* prin această formulă, care geometric reprezintă aria unui dreptunghi, atunci *soluția necunoscută*, adică toată greutatea problemei constă în *transformarea dreptunghiului în pătrat*!“ (31). Pe baza acestui raționament, el a căutat să afle soluția problemei cvadraturii cercului pe *cale experimentală*, procedeu care, pe atunci părea normal.

Scrisorile despre care am amintit mai înainte, precum și cele expuse de Francon în cărțile sale, arată ca un fapt cert că în Europa din sec. XI geometria era privită ca „o artă experimentală". Nu însă și aritmetica. Aceasta era considerată ca o știință a calculului, iar Francon o poseda perfect. De pildă, el știa precis că este imposibil să se exprime în termeni raționali rădăcina pătrată dintr-un număr care nu-i pătrat perfect. Chiar a încercat să demonstreze *iraționalitatea lui* $\sqrt{154}$, număr ce exprima latura pătratului echivalent cercului de diametru 14*. Însă, continua el, *„din punct de vedere geometric*, această latură *poate fi găsită prin experiență*, adică prin cîntărirea figurilor pătrate tăiate din pergament, și anume repetînd această cîntărire pînă se va obține un pătrat care să echilibreze greutatea dreptunghiului cu laturile 11 și 14". Francon a procedat așa, și a rămas convins că imaginînd acest procedeu, a reușit să obțină cvadratura cercului. De fapt, procedeul trebuie socotit ingenios, ținînd seama de cunoștințele lui de geometrie, care nu-i permiteau să înțeleagă ce a vrut să spună Boethius în legătură cu *posibilitatea soluției* (32). Prin aluzia sa, Boethius arăta că avea cunoștințe, fie din auzite, fie din citit, despre variatele soluții propuse de geometrii greci și despre discuțiile în contradictoriu purtate în jurul problemei cvadraturii cercului, dar Boethius scrisese cărțile lui în secolul al VI-lea și de atunci trecuseră cinci veacuri!

Abia prin 1120 a apărut prima traducere în limba latină a *Elementelor* lui Euclid, făcută după traducerea arabă. Autorul ei este Adelhard din Bath care, travestit în student mahomedan a putut urma cursurile Univesității din Cordova și astfel a ajuns în posesia unei copii arabe a cărților lui Euclid. Această traducere a devenit un model pentru toate traducerile ce s-au succedat pînă în secolul al XVI-lea, cînd s-a descoperit textul original grecesc al *Elementelor*. Chiar în același secol

---

* Ca să evite numerele fracționare, Francon a considerat un cerc de diametru fie egal cu 14, fie cu un multiplu de al lui 14. Astfel, pentru d = 14, aria cercului socotită după formula sa era egală cu 11 × 14 = = 154. Făcînd legătura acestei arii cu a dreptunghiului cu laturile 11 și 14 rezulta că latura pătratului = $\sqrt{154}$.

în care s-a făcut prima traducere a lui Euclid, au mai apărut alte două traduceri latinești ale *Elementelor*, tot după manuscrise arabe una a lui Gherard din Cremona (1114—1187) și alta a lui Platon din Tivoli.

Platon din Tivoli se afla la Barcelona între anii 1134—1145 și a fost ajutat la această traducere de învățatul Abraham bar Hiia, cunoscut mai ales sub numele de Savasorda (1070—1136). Tot Platon din Tivoli a tradus în latinește o lucrare de geometrie cuprinzînd și noțiuni de algebră, intitulată *Liber embadorum* compusă de Savasorda în ebraică. Traducerea în românește a acestui titlu ar fi *Cartea despre arii*, căci cuvîntul „embadorum" a fost inventat chiar de traducător prin latinizarea cuvîntului grec „embadon", care înseamnă „arie".

Această lucrare prezintă un interes istoric deosebit, pentru că Leonard Fibonacci din Pisa (1170—1250), cel mai mare matematician european al Evului mediu, a folosit-o drept model pentru cartea sa *Practica geometria*, scrisă către anul 1220. Prin *Practica geometria* se reîntroduce în Europa și adevărata identitate a numărului π. Anume, ocupîndu-se de cvadratura cercului, Fibonacci amintește că valoarea $3\frac{1}{7}$ găsită odinioară de Arhimede, nu este decît o valoare aproximativă a numărului π. La această valoare, el a mai adăugat și aproximarea de origină hindusă $\pi = \frac{377}{120}$.

Mai mult, cunoscînd îndeaproape metoda folosită de Arhimede, a aplicat-o el însuși tot poligoanelor cu 96 de laturi și a obținut astfel o nouă dublă inegalitate :

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}$$

din care a dedus un nou raport ce dă o aproximație a numărului π cu trei zecimale exacte :

$$\pi = \frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{864}{275}.$$

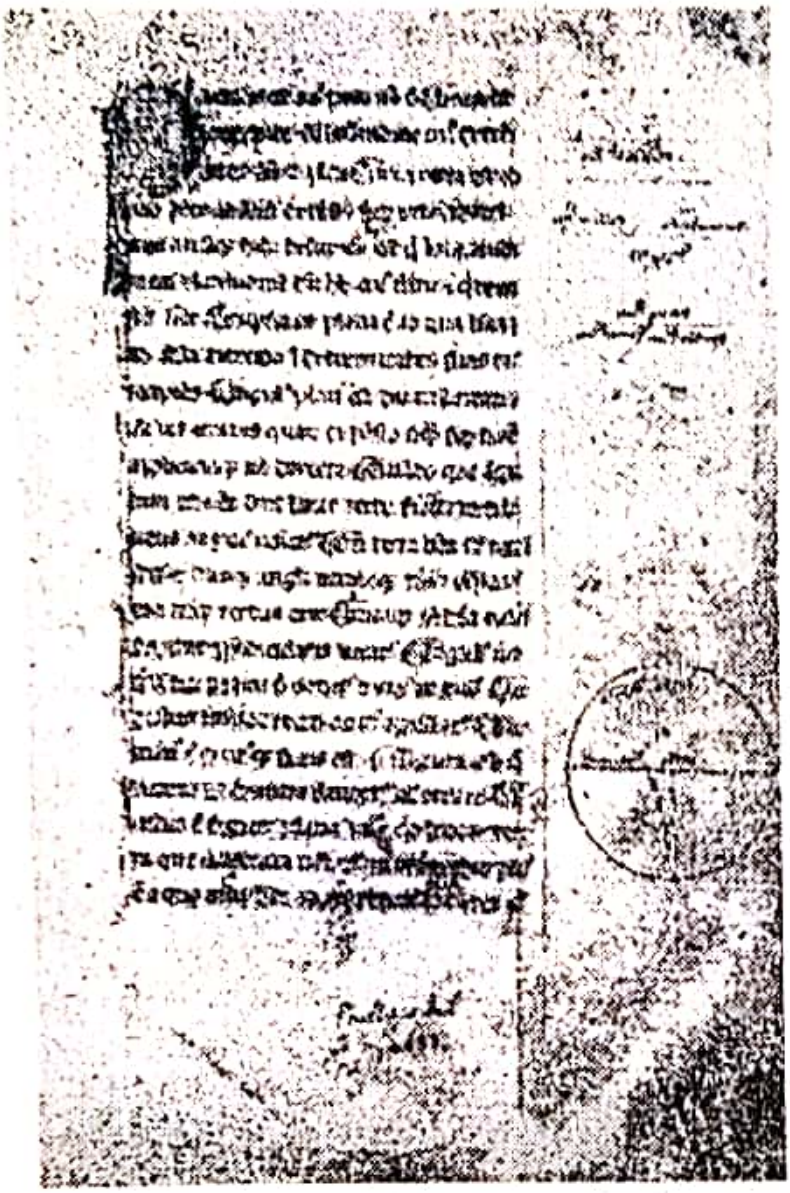
El a stabilit acest raport calculînd media aritmentică dintre $\frac{4}{9}$ și $\frac{1}{5}$, egală cu $\frac{29}{90}$, pe care o evaluează aproximativ prin $\frac{1}{3}$. De aici deduce:

$$\pi = \frac{864}{275} = 3{,}1418 \ldots$$

Prin cultura și inteligența sa, Leonardo Fibonacci a întrecut pe mulți învățați contemporani. De exemplu, pe Jordanus Nemorarius. Deși prin operele sale *De triangulis, libri IV* și *De isoperimetris*, Nemorarius apare ca un geometru remarcabil, el era convins de posibilitatea cvadraturii cercului cu rigla și compasul și a afirmat-o, dar fără a stabili vreo demonstrație în acest sens. De aceeași părere era și Campanus din Novara (sec. XIII) care, folosind traducerea lui Adelhard, a stabilit o nouă versiune latinească, mai completă, a *Elementelor* lui Euclid. Prin notele și comentariile adăugate de el, această lucrare a rămas, pentru o bună bucată de vreme, sursa principală de informații geometrice și a avut influență asupra dezvoltării ulterioare a matematicilor. Încrederea lui Campanus în posibilitatea cvadraturii cercului nu se baza pe ignoranță, ca în cazul lui Francon ci pe o anumită concluzie, trasă din definiția dată de Euclid unghiului de contingență (33).

Pornind de la existența acestor unghiuri, care permitea să se trateze în același mod, atît unghiurile formate din linii drepte cît și acelea dintre liniile curbe, Campanus și Nemorarius credeau că au găsit aici un argument în favoarea posibilității cvadraturii cercului cu rigla și compasul.

Aceeași credință, în posibilitatea cvadraturii, o întîlnim și la Thomas Bradwadinus (1290—1349) supranumit „doctor profundis". Atît în *De quadratura circuli*, cît și în *De continuo*, scrise între anii 1328 și 1335, dar publicate la Paris, împreună



Pagină din „Elementele" lui Euclid. Manuscrisul lui Campanus din Navara

cu alte opere ale autorului, începînd din 1495, el discută nu numai cvadratura, ci și problema pusă de Campanus asupra unghiului de contingență. Considerînd că există un anumit raport irațional între unghiul de contingență și unghiul ascuțit rectiliniu corespunzător lui, el insista asupra faptului că natura iraționalității acestui raport trebuie să fie diferită de aceea a raportului dintre diagonala patratului și latura lui. Deși asemenea speculații erau atunci mai mult de natură filozofică decît geometrică, nu putem trece cu vederea că ele au contribuit la dezvoltarea de mai tîrziu a matematicilor moderne. Thomas Bradwardinus a fost și autorul unui tratat de geometrie cu titlul de *Geometria speculativă*, adică teoretică care, din cauza problemelor pe care le

punea, a avut un larg succes nu numai pe vremea lui, ci și mult după aceea, pînă în secolul al XV-lea (34).

Eroarea asupra posibilității cvadraturii cercului cu rigla și compasul a fost făcută și de Albertus de Saxa (1325—1390), primul rector al Universității din Viena. În cartea sa *De quadratura circuli* el a analizat în mod logic toate argumentele pro și contra posibilității de a ajunge la cvadratura cercului folosind rigla și compasul și s-a declarat partizanul susținătorilor ei (35).

Numai Dominicus din Chivassa sau Dominicus Parisiensis (sec. XIV) a intuit și a accentuat în cartea lui *Practica geometrica* că nu se poate ajunge la cvadratura cercului cu rigla și compasul, insistînd asupra faptului că $3\frac{1}{7}$ este o valoare aproximativă a lui π. Lucrarea sa, terminată la Paris în 1346, este remarcabilă prin rigoarea cu care a fost compusă. „El și-a impus sarcina de a demonstra corectitudinea teoretică, atît a procedeelor practice folosite pe teren, cît și a formulelor metrice din geometria practică și a îndeplinit-o onorabil", scria Paul Tannery (36).

Desigur că, dacă ar fi să comparăm activitatea matematică desfășurată în Europa occidentală între secolele al V-lea și al XV-lea cu aceea manifestată tot pe atunci în orientul asiatic, cel îndepărtat și cel mijlociu, realizările din Europa apuseană ar apărea puerile față de acelea stabilite în Orient. Pentru Europa occidentală această lungă perioadă, de aproape 10 secole, este o perioadă de gestație, de un mare efort, pentru a cunoaște și înțelege lucrările matematice ale înaintașilor greci și arabi. Universitățile din Europa și-au început activitatea în secolul al XII-lea, dar, în domeniul matematicilor, activitatea lor se limita doar la aplicarea cîtorva reguli de calcul și la expunerea unor vagi teoreme din *Elementele* lui Euclid. De aceea, cele cîteva opere matematice în care sînt menționate cunoștințele de atunci asupra numerelor iraționale și ale valorilor numărului π, valori legate de problema cvadraturii cercului, prezintă o deosebită importanță

istorică. Compuse, fie în mînăstiri, fie în centrele comerciale ale Italiei, — ţară în care, din cauza comerţului şi a legăturilor ei cu Orientul, se dezvoltase gustul pentru această ştiinţă, — aceste lucrări au fost cunoscute multă vreme numai într-un cerc foarte restrîns de cercetători, căci cei ce se ocupau de matematici rămîneau aproape complet izolaţi unii de alţii.

CVADRATURA CERCULUI ÎN TIMPUL RENAȘTERII

Decadența spirituală legată de triumful imperialismului roman nu a încetat decît în Renaștere, atunci cînd savanții helenizanți au redeschis cartea științei, exact la pagina pe care grecii din Syracuza și din Alexandria au lăsat-o neterminală.

L. BRUNSCHWICG

Problema cvadraturii cercului n-a fost neglijată nici în timpul marilor agitații și a transformărilor din secolele al XV-lea și al XVI-lea, însemnate în Europa occidentală, pe de o parte prin Războiul, de 100 de ani, prin mari epidemii de ciumă, prin revoluții, prin căderea Constantinopolului, prin Reformă, iar pe de altă parte, prin descoperirea tiparului, renașterea artelor, noul umanism și începerea studiului fenomenelor din natură bazate pe cercetări experimentale.

Idei, pe cît de originale, pe atît de interesante au fost exprimate de Nicolaus din Cusa (1401—1464), celebru filozof umanist, cu vaste cunoștințe atît în domeniul literelor și al filozofiei, cît și în al matematicilor și celorlalte științe. Avînd ocazia să studieze lucrarea lui Arhimede *Despre măsura cercului*, ce fusese tradusă pe atunci în latinește, el a combătut afirmația lui Campanus asupra posibilității cvadraturii cercului cu rigla și compasul. Argumentația lui, desigur de natură filozofică, căci una științifică cu fond matematic nu era încă posibilă, se baza pe principiul stabilit de el al „coincidenței opozițiilor" (*coincidentia oppositorum*), care-i permitea să considere cercul ca un poligon cu un număr infinit de laturi. În felul acesta, el a jonglat cu noțiunea de infinit mic, cu mult înainte ca Newton și Leibniz să fi descoperit calculul infinitezimal.

Iată cum privea el problema cvadraturii cercului: „Acei care afirmă posibilitatea cvadraturii cred că fiind dat un cerc, există totdeauna un patrat care să nu fie nici mai mic, nici mai mare decît cercul. Dar dacă patratul nu este nici mai mare nici mai mic decît cercul, lăsînd la o parte o foarte mică fracțiune, avem înaintea noastră niște figuri care se zic tot egale. În acest caz, iată cum trebuie înțeleasă egalitatea: o mărime este egală cu o alta dacă ea nu-i nici mai mare, nici mai mică decît alta, pînă la o fracțiune rațională, oricît de mică ar fi ea. Dacă se înțelege în acest fel noțiunea de egalitate, atunci eu cred că-i corect să se considere că, dîndu-se perimetrul unui anume poligon, există un cerc de aceeași lungime. Dar dacă se consideră noțiunea de egalitate într-un mod absolut, fără a ține seamă de nici o diferență, atunci cealaltă afirmație e adevărată: nu există nici o arie necirculară precis egală cu alta circulară".

Deși din cauza puținelor surse de informație, cunoștințele matematice ale lui Nicolaus din Cusa erau destul de modeste, el a ajuns la multe rezultate noi, care au interesat pe matematicienii de mai tîrziu. De exemplu, căutînd să stabilească raportul dintre lungimea cercului și diametrul său, Cusanus a imaginat un cerc care să se rostogolească fără alunecare pe o dreaptă. Lungimea cercului se exprimă, în acest caz, prin lungimea curbei descrisă de un punct al lui din momentul ce se află pe dreaptă și pînă revine iar pe dreaptă. Apare aici prima prezentare a ciclodiei, curbă ce va deveni celebră în secolul al XVII-lea. De asemenea, el a stabilit și rectificarea aproximativă a arcului de cerc, prin formula:

$$\theta \simeq \frac{3 \sin \theta}{2 + \cos\theta} = \theta \left(1 - \frac{\theta^5}{180} + \ldots\right) \quad . \qquad (37)$$

Și tot el a determinat o formulă ce dă valoarea apropiată a razei (r) unui cerc, a cărui lungime se consideră egală cu perimetrul unui poligon dat, cu n laturi:

$$r = \frac{r_n + 2\rho_n}{3}$$

înde r_n este raza cercului circumscris și ρ_n a cercului înscris un poligonul cu n laturi.

Această metodă este cunoscută azi sub numele de *metoda izoperimetrelor*. Insistînd asupra faptului că aria unui cerc nu-i comensurabilă cu a unui poligon, el a găsit latura patratului a cărui arie este egală — abstracție făcînd de o cantitate foarte mică — cu aria unui cerc dat și de aici o aproximație, prin exces a numărului π, mai bună decît aceea dată de Arhimede, anume $\pi = 3{,}1423$ față de $\pi = 3{,}1428$ (38). Putem bănui cît l-a încîntat rezultatul, dacă s-a lăudat cu el, afirmînd că nu se va putea stabili vreo altă valoare mai exactă! (39) Dacă ne gîndim bine, trebuie să-i dăm dreptate, în afirmația lui fiind mai puțină vanitate decît se pare. Căci Cusanus știa cît de limitate erau cunoștințele matematice ale contemporanilor săi și ce puțini erau cei ce puteau ajunge la nivelul lui de cultură matematică. El trăia încă în regimul manuscriselor și nu bănuia avîntul pe care-l va lua cercetarea matematică prin invenția lui Gutemberg, — deși calea către posibilitățile rapide de informare se deschidea chiar de pe atunci. Astfel, în 1482, numai la 18 ani după moartea lui, au fost imprimate pentru prima oară *Elementele* lui Euclid.

Cu privire la numărul π, Cusanus a stabilit un drum și pe acesta se va merge. Timp de un secol, atenția matematicienilor s-a concentrat asupra valorii $\pi = 3{,}1423$ stabilită de Cusanus, căutînd o alta și mai bună. La această competiție a luat parte, printre mulți alții, și Luca Pacioli (1445—1514), cunoscut încă și sub numele de Luca din Borgo, după numele localității toscane unde s-a născut. Matematician renumit, el a publicat în 1494 un vast tratat matematic de natură enciclopedică, cu titlul : *Suma de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita* (40), iar în 1509 : *De divina proportione*, în care se ocupa de proprietățile mediei geometrice (41).

Deși în privința cvadraturii nu a adus nimic nou, prin operele publicate Luca Pacioli a contribuit la difuzarea cunoștințelor matematice anterioare, ca de exemplu ale acelora din cărțile lui Fibonacci, aproape complet necunos-

Luca Pacioli

cute, sau ale altora provenite din traducerea scrierilor arabe de aritmetică și de algebră. Așa se face că, la începutul secolului al XVI-lea, îndată ce *Suma* s-a răspîndit printre cei ce îndrăgeau matematicile, au apărut atît de numeroase cărți despre posibilitatea sau imposibilitatea cvadraturii cercului, încît ar fi cu neputință să le enumerăm aici. Ne vom opri numai la acelea care au stimulat cercetările sau au marcat un progres real în evaluarea numărului π.

Astfel, chiar în 1503, Charles de Bouvelles (1470—1553) a încercat să obțină cvadratura cercului pornind de la cicloidă și era convins că a găsit-o. Problema se găsește în lucrarea pe care a tipărit-o în latinește, la Paris, sub titlul : *Geometricae introductionis, libri VI.* (Șase cărți de introducere în geometrie) (42). În 1542, aceste cărți au fost traduse în limba franceză de un alt pasionat căutător al cvadraturii : Orontius Finеus (1494—1555), primul profesor de matematici de la Collège de France. El însuși publicase, cu zece ani mai înainte *Protomathesis* (Protomatematica), o carte apreciată atît pentru

faptul că introducea pe cititor în tehnica calculului sexagesimal, cît şi pentru claritatea cu care prezenta noţiunile matematice. În 1544 a tipărit şi o broşură *Quadratura circuli*, în care adăuga şi construcţii stabilite de el (43) tot pentru rezolvarea cvadraturii cercului cu rigla şi compasul. Aceste construcţii au fost însă combătute mai întîi, în 1546, de către P. Nunez în *De erratis Oronti Finei* (44) (Erorile lui Orontius Finaeus) şi apoi în 1559 de J. Butéon (1492—1572) în *De quatratura circuli, libri II.* Adevăratul nume al lui Butéon era Borrel şi el era bine cunoscut prin tratatele sale de aritmetică şi de algebră publicate anterior. Interesante atît prin istoric, cît şi prin observaţiile pe care le fac aceşti doi autori, în aceste cărţi s-au analizat construc-

Pagină din cartea lui Charles de Bouvelles

țiile asupra cvadraturii propuse de Fineus, arătîndu-se că luîndu-le de bune ar rezulta o valoare a lui π, egală cu $\sqrt{10}$, adică inferioară aceleia găsite de Arhimede. Cu aceste două lucrări, ale lui Nunez și Buttéon, putem spune că începe un nou capitol din frămîntata istorie a numărului π, acela în care se analizează, în mod critic, pretențiile eronate ale unor „cvadraturiști" adică ale acelora care susțineau că au găsit metoda precisă de a determina *cu rigla și compasul* latura patratului echivalent cu un cerc. De aici înainte, ca să se convingă de veracitatea sau falsitatea unor noi soluții, matematicienii vor căuta metode de determinare a unui număr cît mai mare de zecimale exacte ale numărului π. Era singura cale pe care o puteau străbate deocamdată, ca să țină piept numărului tot mai mare de „cvadraturiști",

Prin aceasta însă, nu trebuie să credem că ar fi început o serie de lucrări „sistematice și în colaborare" a matematicienilor din diferite țări. Nici vorbă nu poate fi de așa ceva. Cercetările se făceau de unul singur și complet la întîmplare. Rar de tot, matematicienii din țări diferite se cunoșteau între ei. Pe atunci nu exista nici o revistă cu caracter matematic și nici nu se ivise moda corespondenței dintre matematicieni, prin care, peste un secol, se vor comunica și schimba informațiile și descoperirile nepublicate încă.

Rezultatele pe care le cunoaștem acum în ordinea lor firească ori cronologică, au fost puse în ordine pe la sfîrșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului nostru, în urma studiilor sistematice de istorie a matematicilor. Așa se explică, de exemplu, de ce în Franța, cel mai mare matematician al secolului al XVI-lea, François Viéte (1540—1603), aplicînd metoda lui Arhimede la poligoane cu $6.2^{16} = 393\,216$ laturi, a stabilit, în 1579, primele 9 zecimale exacte ale lui π, pe cînd în Olanda, Adriaen Anthoniszoon (1543—1620), numit și Metius (adică din Metz), un matematician destul de renumit, a ajuns, în 1585, numai la 6 zecimale exacte ! (45).

În 1590, Adrianus Romanus (1561—1615), folosind poligoane regulate cu $2^{30} = 1\,073\,741\,824$ laturi, a calculat primele 15 zecimale exacte ale numărului π. Aceasta nu l-a împiedicat

Pagină din cartea lui Orontius Finaeus

însă pe filologul Joseph Scaliger din Leyda (1540—1609) să afirme în *Nova cyclometria*, carte pe care a publicat-o în 1592, că a reușit cvadratura cercului în mod absolut. Pretenția sa nu a rezistat criticilor aduse de mulți dintre cei mai de seamă matematicieni ai timpului. Dar puterea lor de convingere n-a avut efect. Deși acești matematicieni i-au dovedit, în mod riguros, că pretinsa lui construcție conducea la valoarea $\pi = \sqrt{10}$; el nu a vrut să admită nici un argument care să-i conteste „cvadratura" și a continuat să-și susție afirmația, sfidînd logica matematicienilor (46).

Printre cei ce l-au combătut atît pe Scaliger cît și pe Fineus și încă pe alții, amintim aici numai pe Adrian Romanus. Cartea lui *Apologia pro Arhimede, ad clarissimus Josephum Scaligerum exercitationes cyclicae Orontius Fineaus et Raymo-*

rum Ursum, apărută în 1597, rămîne interesantă și azi, atît prin ideile pe care le-a dezvoltat, cît și prin enumerarea multor pretinși cvadraturiști contemporani lui. Printre aceștia se afla și un vestit astronom, care publicase, în 1586, o metodă de prescurtare a calculelor numită *Prostafereză* (pe atunci tabelele de logaritmi nu fuseseră descoperite). Tot în vederea combaterii unei pseudo-cvadraturi, Ludolph van Ceulen (1540—1610), cel mai celebru calculator al timpului său a stabilit, în 1596, primele 20 de zecimale exacte ale lui π. În hîrtiile rămase de la el au mai fost găsite încă altele 15 ; așadar, el a calculat de fapt primele 35 de zecimale ale acestui număr (47).

Un alt conflict asupra cvadraturii a fost declanșat de astronomul Christian Longomontanus (1562—1647), elev al lui Tycho Brahe. Și acesta a publicat în 1622 o carte : *Cyclometria lunulis reciproci demonstrata*, în care susținea că se poate reduce cvadratura cercului la o construcție cu rigla și compasul. Calculele au arătat însă, că din construcția găsită de el ar rezulta că $\pi = 3{,}15185$, ceea ce nu corespundea nici măcar valorii stabilită de Arhimede. Nici acest astronom-cvadraturist nu a vrut să-și recunoască greșala, deși au încercat să i-o dovedească mulți matematicieni de seamă. În 1644 el a tipărit, la Amsterdam, o a doua carte : *Christiani Longomontani, Cimbri, rotunde in planus, sau circuli absoluta mensura*, și mai plină de erori decît prima.

Numai citind *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle*, scrisă de Jean Etienne Montucla (1725—1799), ne-am putea da seama cîtă pasiune au pus matematicienii și nematematicienii pentru rezolvarea problemei cvadraturii cercului ! Montucla povestește, cu real talent literar, multe dintre întîmplările amuzante ce se împleteau cu lucrările, pline de seriozitate și migală, ale savanților curioși să dezlege taina acestui număr. De altfel, tot din cauza lipsei totale de informare științifică, s-a putut afla mai tîrziu că matematicienii din Europa occidentală au redescoperit multe dintre adevărurile pe care le considerau stabilite de ei, în timp ce ele fuseseră gîndite și descoperite mai înainte de către alți învățați din Orient.

Dar, cu toate că matematicienii din Europa occidentală au ajuns la aceste probleme de evaluare a numărului π cu cîteva secole mai tîrziu decît matematicienii din Orient, și cu toate că aceste cercetări cereau calcule lungi și obositoare care durau uneori fără întrerupere mulți ani, ei au obținut și rezultate noi, ce au depășit cu mult pe cele orientale. Fiindcă matematicienii europeni au urmărit mai mult dezlegarea teoretică a problemei cvadraturii cercului și deci a naturii lui π decît cea practică, calea urmată de ei a condus la o lărgire netă a perspectivei noțiunii de număr și la descoperirea a noi metode de cercetare a numerelor, pe care le vom vedea în capitolul următor.

ALTE MODALITĂȚI DE A EXPRIMA NUMĂRUL π

Știința își caută drumul prin întunecimea ce o are înainte și nu prin luminișul de care a trecut.

ARNAUD DENJOY

În strădania lor de a atinge o cît mai bună aproximare a numărului π, matematicienii din secolele al XV-lea și al XVI-lea și prima parte a celui de al XVII-lea au încercat să îmbunătățească metoda lui Arhimede, în modul ce li s-a părut cel mai firesc și logic, anume, depășind numărul de 96 de laturi ale poligoanelor regulate înscrise și circumscrise cercului. Dar după recordul atins de Ludolph van Ceulen care a stabilit 35 de zecimale exacte ale numărului π, calculînd perimetrele poligoanelor regulate înscrise și circumscrise cercului cu peste 4 pentalioane de laturi, metoda preconizată s-a dovedit inaplicabilă. În cartea sa *Cyclometricus*, tipărită în 1621, Willebrod Snellius (1581—1626) a propus altă modalitate de perfecționare a metodei lui Arhimede. Anume, el a înlocuit dubla inegalitate $\sin\theta < \theta < \operatorname{tg}\theta$ folosită de toți matematicienii, începînd cu Arhimede, ca să fixeze limitele de variație ale arcului de cerc cuprins între laturile celor două poligoane cu n laturi, unul înscris și altul circumscris cercului, prin altă limită mai restrînsă anume:

$$\frac{3\sin\theta}{2+\cos\theta} < \theta < \frac{1}{3}(2\sin\theta + \operatorname{tg}\theta).$$

În această nouă inegalitate, limita superioară se exprimă tocmai prin formula stabilită odinioară de Nicolaus din Cusa, dar limita inferioară este cu mult mai restrînsă decît

cea veche (48). Snellius a dovedit superioritatea metodei sale arătînd că se pot determina 7 zecimale exacte ale numărului π numai cu ajutorul hexagonului înscris și circumscris cercului, în timp ce, cu prima inegalitate, Arhimede a dedus două zecimale prin poligoane cu 96 de laturi. Formula propusă de Snellius a fost primită cu bucurie și interes, dar curînd s-a constatat că, deși exactă, ea se baza pe o demonstrație greșită.

Adevărata demonstrație a fost dată peste 33 de ani, în 1654, de către Christian Huygens (1629—1695) în *De circuli magnitude inventa*. Cartea a avut un mare răsunet atunci și multă vreme după publicarea ei. În ea se găsesc și alte inegalități care restrîng și mai mult limitele între care se află cuprins arcul de cerc și, în plus, sînt arătate diferite construcții ușor de executat cu rigla și compasul, care dau, prin valori aproximative, latura patratului echivalent unui cerc dat. Dar, cu toate înlesnirile de calcul oferite de noile formule propuse de Snellius sau Huygens, nici un matematician și nici un calculator nu s-a mai încumetat să treacă pragul celor 35 de zecimale stabilite de Ludolph, dar nici să abandoneze problema, care părea tot așa de plină de mister ca în Evul mediu sau în prima etapă a Renașterii. Și tot ca și atunci, existau mulți matematicieni și profani ce credeau în posibilitatea cvadraturii cu rigla și compasul și o susțineau prin demonstrațiile lor greșite.

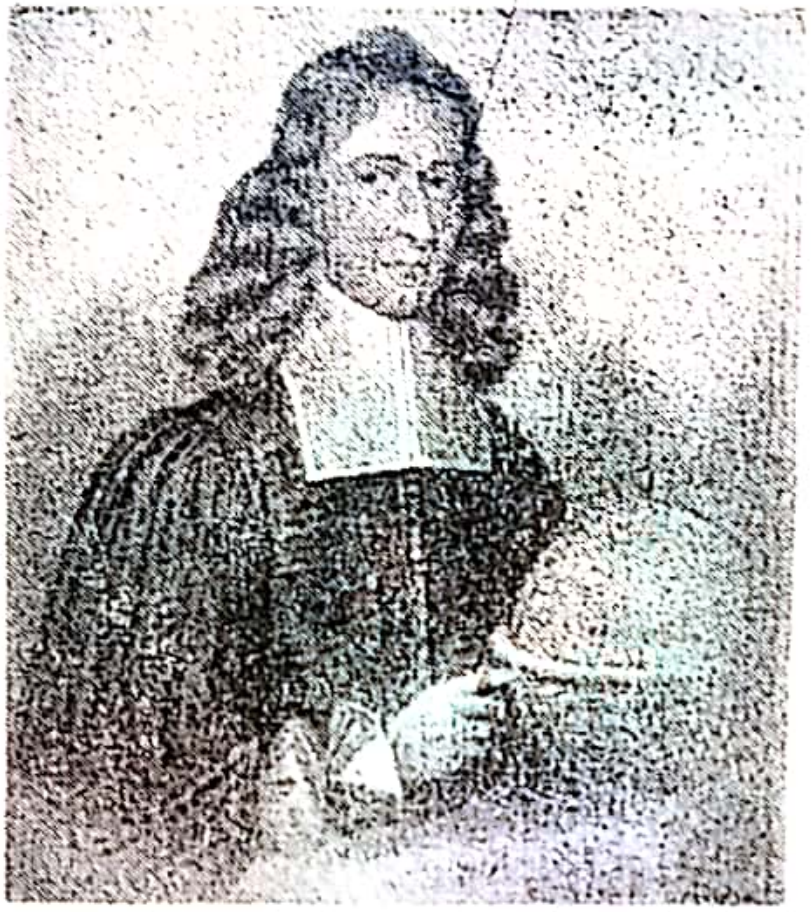
Printre aceștia, un loc deosebit îl ocupă Gregorius a St. Vincentio (1584—1667), considerat ca unul dintre cei mai mari geometri de atunci. În lucrarea ce a tipărit-o în 1647 și la care a lucrat cea mai mare parte din viața lui: *Opus geometricus, quadratura circuli et sectionum coni* (Opera geometrică despre cvadratura cercului și a secțiunilor conice), formată din 10 volume cu peste 1200 file in folio, se găsea mult material prețios și nou care a putut fi folosit cu succes la crearea geometriei moderne. Numai în privința cvadraturii cercului, concluziile lui Gregorius au fost false! Greșala sa de raționament a fost relevată de către Ch. Huygens în cartea amintită mai înainte. Stabilirea erorii din teorema lui St. Vincentio de către Ch. Huygens a fost interpretată ca

un argument puternic contra cvadraturiștilor, deși nu exista încă nici o demonstrație care să confirme sau să infirme posibilitatea cvadraturii cercului. În această stare de spirit, cînd se aștepta o demonstrație decisivă asupra imposibilității cvadraturii cercului, James Gregory (1638—1675) a crezut că a găsit-o și a susținut-o cu aceeași îndîrjire cu care ceilalți își susțineau cvadratura.

James Gregory are meritul de a fi născocit o variantă a metodei lui Arhimede pentru determinarea valorii lui π. Anume, în loc să opereze cu lungimea cercului și cu perimetrele poligoanelor, el a folosit aria cercului și ariile celor două poligoane regulate, respectiv înscrise și circumscrise cercului. Metoda a prezentat-o în cartea *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, apărută în 1667. Așadar, el a înlocuit, în calcule, perimetrele celor două poligoane și lungimea cercului prin

Coperta cărții „Opus geometricus"

James Gregory



ariile lor. În procedeul său, s-a bazat pe următoarea teoremă : „Dacă A_n și B_n sînt ariile a două poligoane regulate cu n laturi înscrise și respectiv circumscrise unui cerc, iar A_{2n} și B_{2n} ariile poligoanelor regulate de același fel, cu 2n laturi, atunci există relațiile :

$$(1) \qquad A_{2n} = \sqrt{A_n \cdot B_n}\,; \quad B_{2n} = \frac{2A_n \cdot B_n}{B_n + A_{2n}}$$

Prima dintre formule fusese stabilită mai de mult, întîi de Jordanus Nemorarius și în urmă de W. Snellius, dar nici unul dintre ei nu s-au gîndit că ar putea exista și o formulă de recurență corespunzătoare poligoanelor circumscrise și nici că le-ar putea da întrebuințarea pe care le-a dat-o Gregory. Mai întîi, el a dovedit, așa cum se vede din titlul cărții, că aceste formule sînt valabile și pentru ariile elipselor, precum și ale sectoarelor de hiperbolă. Fapt remarcabil : atunci cînd calculul integral nu era încă închegat, se dădea posibilitatea de a se calcula, prin aproximare, ariilor unor figuri

mărginite de linii curbe, în afară de cerc sau de parabolă (pentru care existau determinările lui Arhimede).

Dar Gregory considera că prin formulele (1) avea dreptul să tragă o concluzie surprinzătoare, anume să demonstreze imposibilitatea cvadraturii cercului cu rigla și compasul! Și iată cum. Pornind de la ariile pătratelor înscrise și circumscrise cercului de rază 1, așadar de arie π, el a stabilit ariile pătratelor cu un număr dublat de laturi. Aria patratului înscris fiind egală cu 2: ($A_4 = 2$), iar a celui circumscris cu 4: ($B_4 = 4$), din formula (1) a găsit $A_8 = 2\sqrt{2}$ și $B_8 = \frac{8}{2+\sqrt{2}}$. Continuînd, a obținut astfel două șiruri de numere care reprezentau ariile poligoanelor înscrise în cerc și ale celor circumscrise cercului. Primul șir este crescător și cu valori ce rămîn mereu mai mici decît π: $A_4 < A_8 < A_{16} < \ldots\ldots\ldots < A_{2n} \ldots < \pi$, al doilea este descrescător și cu valori ce rămîn mereu mai mari decît π: $B_4 > B_8 > B_{16} \ldots\ldots\ldots > B_{2n} > \ldots > \pi$.

Aceste două șiruri au fiecare un număr infinit de termeni și legea lor de formare arată că nici unul dintre ele nu are un termen ultim, care să devie egal cu numărul π. Pentru Gregory aceasta era o dovadă precisă că, cu rigla și compasul, nu era posibilă nici cvadratura cercului și nici a hiperbolei. Ținînd seama de faptul că Huygens combătuse cvadratura lui St. Vincent, nu mică a fost surpriza lui Gregory cînd tot Huygens a combătut și această demonstrație, arătînd că nu-i suficientă o argumentație pentru a stabili posibilitatea cvadraturii cercului, atîta vreme cît nu se cunoaște natura numărului π. Această atitudine, aparent contradictorie a lui Huygens, l-a tulburat pe Gregory și din riposta lui s-a iscat o vie polemică științifică între cei doi mari matematicieni, polemică care a fost urmărită cu pasiune de întreaga lume savantă de atunci. De fapt, această ceartă a pus în evidență cît de necesar era să se precizeze ce se înțelege prin *număr* și *sub ce formă se pot prezenta numerele*! Deocamdată, însă, aceste probleme nu puteau fi soluționate, căci ele cereau încă multe alte tatonări prealabile. Printre acestea se poate

Christian Huygens

număra și o altă variantă a metodei lui Arhimede, pusă la punct de către Leonard Euler (1707—1783), numită metoda izoperimetrelor.

Metoda izoperimetrelor a fost cunoscută din 1701, cînd s-au publicat operele postume ale marelui geometru și filozof Descartes (1596—1650). Ea fusese concepută încă din secolul al XV-lea de Cusanus, dar și atunci ca și în 1701, a trecut neobservată. Abia în 1763 s-a impus atenției matematicienilor, cînd ea a fost folosită de Euler ca să determine valoarea numărului π. Numirea metodei provine din faptul că șirul poligoanelor înscrise și circumscrise cercului sînt supuse condiției de a avea toate *același perimetru*. În acest caz, Euler a demonstrat teorema: „Dacă a_n și b_n sînt respectiv razele cercurilor înscrise și circumscrise unui poligon regulat cu n laturi, avînd perimetrul P, iar a_{2n} și b_{2n} razele cercurilor înscrise și circumscrise poligonului cu 2n laturi, însă avînd același perimetru P, atunci există relațiile:

(2) $$a_{2n} = \frac{a_n + b_n}{2}; \; b_{2n} = \sqrt{\frac{b_n(a_n + b_n)}{2}} = \sqrt{b_n}\ \sqrt{a_{2n}}.$$

Aceste formule conduc la un şir de duble inegalităţi

$$2\pi a_{2n} < P < 2\pi b_{2n}$$

din care se poate determina numărul π (49).

Interesul pe care l-a stîrnit metoda izoperimetrelor nu se datoreşte numai modalităţii noi de calculare a valorii numărului π, ci mai ales expresiei matematice a numărului π, surprinzător de ciudată, la care se ajunge aplicînd formulele (2). Vom stabili-o urmărind îndeaproape aceste calcule ce vor fi efectuate pe cale trigonometrică.

Fie θ unghiul la centru corespunzător arcului subîntins de latura poligonului regulat cu n laturi. După notaţiile folosite avem :

(3) $a_n = b_n \cos\frac{\theta}{2}$ şi $a_{2n} = b_{2n} \cos\frac{\theta}{4}$. Înlocuind în (2) se obţine :

(4) $$a_{2n} = b_n \cos^2\frac{\theta}{4} \text{ şi } b_{2n} = b_n \cos\frac{\theta}{4}.$$

Dacă se consideră că poligonul de la care se porneşte este un patrat înscris în cercul de rază = 1, atunci :

$$n = 4, \; \theta = \frac{\pi}{2}, \; a_4 = \cos\frac{\pi}{4}, \; b_4 = 1 \text{ şi } P = 4\sqrt{2}.$$

Folosind formulele (2), (3) şi (4), rezultă :

$$a_{4\cdot 2} = a_8 = \cos^2\frac{\pi}{8}; \; b_{4\cdot 2} = b_8 = \cos\frac{\pi}{8}$$

$$a_{4\cdot 2^2} = a_{16} = \frac{a_8 + b_8}{2} = \cos\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{16};$$

$$b_{4\cdot 2^2} = b_{16} = \sqrt{b_8}\sqrt{a_{16}} = \cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}.$$

și, în general :

$$a_{4\cdot 2^i} = \cos\frac{\pi}{4.2}\cos\frac{\pi}{4.2^2}\cdot\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{4.2^{i-1}}\cdot\cos^2\frac{\pi}{4.2^i}.$$

$$b_{4\cdot 2^i} = \cos\frac{\pi}{4.2}\cdot\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^2}\cdots\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^{i-1}}\cdot\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^i}.$$

Cînd i creşte nedefinit, lungimea cercului se confundă cu perimetrul patratului circumscris şi raza cercului este

$r = b_\infty = \cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\ldots$ Pe de altă parte,

$P = 4\sqrt{2} = 2\pi r$ şi dacă se înlocuieşte $\sqrt{2}$ prin $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}$,

rezultă :

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{i\to\infty}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\cos\frac{\pi}{4.2^i}\cdots(i=0,1,2\ldots).$$

Aşadar, iată numărul π exprimat analitic prin limita, cum spunem noi azi, a unui produs infinit. Noţiunea de limită era însă atunci destul de vagă, căci tocmai pe vremea aceea ea se plămădea în minţile analiştilor. Rezultatul, cum nu se poate mai surprinzător prin armonia lui interioară, a entuziasmat pe matematicieni, mai ales prin faptul că el se alătura altor expresii, de aceeaşi natură, stabilite încă mai de mult. De altfel, chiar şi acest produs fusese stabilit cu un secol mai înainte de către François Viète, dar era altfel exprimat (50). Apoi, după Viète în 1655, John Wallis (1616—1703) publicase în *Arithmetica infinitorum sive nova methodus* următorul produs infinit, care avea ca limită numărul $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{(2n-1)}\cdot\frac{2n}{(2n+1)}\cdots \qquad (51)$$

John Wallis

Tot Wallis a prezentat, în aceeași operă, altă expresie infinită a numărului π, de data aceasta sub forma unei fracții continue nelimitate:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^3}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ldots}}}}$$

Formula dată fără demonstrație nu-i aparținea, era menționat că ea îi fusese comunicată de prietenul său W. Broucker (1620—1684), care o stabilise. Demonstrația a fost dată de Leonard Euler (1707—1783) și se află în *Opuscula analitica*, vol. II. În volumul I al aceleiași lucrări, Euler a stabilit alte două fracții continue nelimitate legate de numărul π (52). În 1761, J. H. Lambert (1728—1777) exprimase numărul π prin altă fracție continuă nelimitată (53):

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ldots}}}}$$

Rezultatele expuse în acest capitol arată că, în istoria numărului π s-a petrecut o schimbare fundamentală a direcției de investigare, care a îndepărtat cercetările de la vechea cale geometrică introdusă de Arhimede cu 19 secole în urmă și le-a îndreptat pe altă cale, nouă, analitică*. Acest fapt se reflectă în modificările petrecute în natura problemelor care se puneau și se cereau rezolvate, începînd din secolul al XVI-lea. Apar, de pildă, probleme legate de studiul mișcării corpurilor, de procesele de variație sau de dependență între mărimi variabile, iar rezolvarea acestora nu se mai poate face fără ajutorul algebrei și a analizei. Bazele algebrei au fost puse de Viète în 1591. El a stabilit în *Artem analiticam isagoge* (Introducere în arta analitică) diferența dintre calculul numeric și cel algebric. Dar dacă Viète și urmașii lui priveau algebra încă tot prin prisma geometriei, mulțumindu-se să observe că folosind-o se pot stabili mai ușor și mai elegant anumite demonstrații geometrice, de pe la jumătatea secolului al XVII-lea geometria se va supune întîi algebrei, prin crearea geometriei analitice de către Descartes și Fermat și apoi analizei, prin crearea calculului infinitezimal de către Newton și Leibniz.

Era deci natural ca această schimbare de atitudine să se manifeste și în privința cercetărilor asupra numărului π. Acestea s-au petrecut, după cum am văzut, pe două căi diferite. Una, prin stabilirea unor expresii pur analitice prin care se definea numărul π, alta, prin introducerea : a) de către Snellius și Huygens a unor noi procedee de calcul al limitelor și b) prin modificarea procedeului folosit de Arhimede, atît de către Gregory, cît și de Euler. În ambele cazuri s-au stabilit formulele de recurență din care numărul π apărea ca limită a unui șir nelimitat de numere. Astfel, cercetările asupra naturii numărului π pierd caracterul lor geometric și tind spre cel analitic. Cu tot caracterul lor oarecum restrîns, referindu-se numai la numărul π, aceste lucrări au deschis calea către cercetarea noțiunii generale

---

* Adică de calcul (numeric sau literar). Expresia *ars analitica* a fost introdusă de Fr. Viète.

de număr. Problema a pus-o Huygens atunci cînd a refuzat să admită demonstrația lui Gregory despre imposibilitatea cvadraturii cercului cu rigla și compasul. Dar acest proces de disecare a noțiunii de număr s-a petrecut destul de lent, căci însăși noțiunea de număr irațional nu a putut pătrunde în cercurile mai largi ale matematicienilor decît în a doua jumătate a veacului al XVIII-lea.

Iar, cu privire la numerele negative, în cursul secolului al XVIII-lea ele nu au reușit să fie considerate ca o extindere logică a numerelor pozitive. Viète nu le-a admis de loc existența. Wallis le consideră „ca opuse celor pozitive", Descartes și Newton spuneau despre ele că sînt „mai mici decît nimic" (adică zero), iar Euler afirma în 1754 că ele sînt mai mari decît infinitul!

Cu numerele complexe lucrurile stăteau și mai prost. Deși ele s-au impus încă din secolul al XVI-lea, în calitatea lor de rădăcini ale ecuațiilor algebrice de gradul al doilea și mai mare, Descartes le-a numit „imaginare", deoarece nu-și putea închipui asemenea mărimi! Rezolvarea problemei despre natura numărului π nu va fi posibilă mai înainte ca aceste numere „imaginare" să-și fi afirmat existența și importanța și nici pînă nu se va lămuri, cît de cît, dacă nu ce este un număr, cel puțin de cîte feluri pot fi numerele. De aceea, în cele ce urmează va trebui să urmărim mai întîi istoria clasificării numerelor imaginare, precum și ale altor numere ce vor mai avea să-și spună cuvîntul în această vastă problemă legată de natura numerelor.

NUMĂRUL „i“

Adevărul nu strălucește decît în ochii care l-au căutat îndelung, destul de îndelung ca să merite să-l vadă.

HENRI LEBESGUE

Pare de necrezut că nimeni înaintea matematicienilor italieni din secolul al XVI-lea nu s-a gîndit la numărul „i“! Știm bine că el este strîns legat și chiar imposibil de separat de soluțiile ecuațiilor algebrice de gradul al doilea, iar acestea au fost amănunțit studiate, atît de greci, cît și de chinezi, hinduși și arabi. Și e curios mai ales că nu l-au descoperit chinezii sau hindușii, pe de o parte fiindcă ei au stabilit formula generală a rezolvării ecuației de gradul al doilea și, pe de alta, pentru că, spre deosebire de greci, ei aveau o concepție mult mai largă despre număr, în mulțimea cărora ei cuprindeau atît pe cele raționale cît și pe cele iraționale, ba chiar și pe cele negative! Prin 1114, matematicianul hindus Bhascara se referea, în *Vijaganita* la rădăcina patrată a unui număr negativ, dar nu-i admitea existența, motivînd că „un număr negativ nu este niciodată un patrat perfect“.

În privința Europei occidentale, descoperirea a urmat calea ei firească, deoarece pînă în secolul al XV-lea noțiunea de număr cuprindea numai întregii naturali și pozitivi deci ecuațiile de gradul întîi, de gradul doi sau cele bipatrate nu puteau avea decît rădăcini pozitive! Pentru ecuația cubică de tip $x^3 + ax = b$, Scipion de Ferro (1465—1525) descoperise prin 1510 formula de mai jos pe care a păstrat-o ca un secret de familie:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}.$$

Ea este cunoscută azi sub numele de „formula lui Cardan". O nedreptate, cu un sîmbure de dreptate totuşi, fiindcă Gerolamo Cardano (1501—1576) din Pavia a fost acela care a publicat în *Ars Magna* (1545) formula şi istoria ei (54).

Cardan a fost unul dintre spiritele cele mai luminate ale epocii şi meritul său nu se mărgineşte numai la difuzarea formulei ce-i poartă numele. El a recunoscut pluralitatea rădăcinilor unei ecuaţii algebrice de grad superior primului, ţinînd seamă şi de rădăcinile negative şi chiar şi de cele complexe, despre care a observat că se prezintă întotdeauna sub formă de perechi. Bineînţeles că el nu a considerat aceste numere complexe decît din punct de vedere formal, văzînd în ele simple expresii algebrice, care rezultau din operaţiile efectuate cu coeficienţii ecuaţiei respective. De exemplu, el a propus problema : „Să se afle două numere aşa fel ca suma lor să fie 10, iar produsul lor 40".

Soluţia : $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$ şi $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$ l-a speriat poate şi pe el căci, adăuga, spre liniştirea tuturor, că asemenea numere sînt „imposibile" sau „sofistice" şi nu au o existenţă reală, pentru că pătratele tuturor numerelor sînt pozitive! (55).

Meditînd la ele, matematicienii care au urmat lui Cardan nu s-au mai speriat de aceste numere prezentate de el, ci şi-au propus să le folosească. Astfel, în *Algebra* lui Rafael Bombelli din 1572, au apărut şi regulile de calcul, atît pentru numerele negative, cît şi pentru cele complexe de forma $(a + bi)$, unde a şi b sînt numere raţionale, iar $i = \sqrt{-1}$ („această rădăcină patrată din numărul negativ —1 fiind privită ca un număr ce ascultă de regulile de operaţie ale numerelor adevărate"!). Mai mult, în cartea sa, Bombelli atrăgea atenţia că, în efectuarea calculelor trebuie să se ţină seama de regula puterilor lui „i", anume $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$ etc. (56).

În 1629, Albert Girard (1592—1632) a arătat în *Invention nouvelle en Algebre* că rădăcinile ecuaţiei $x^4 = 4x - 3$ sînt

1,1, $(-1 + \sqrt{-2})$ și $(-1 - \sqrt{-2})$, observînd că : $(-1 + \sqrt{-2}).(-1 - \sqrt{-2}) = 3$. Lui i se datorește introducerea simbolului $\sqrt{-1}$ și în general $\sqrt{-n}$ (considerînd pe $n = 1, 2...$). Această notație a fost folosită în urmă de Wallis, Newton și alții. Tot în cartea lui se află și prima formulare a teoremei fundamentale a algebrei, teoremă demonstrată abia peste 200 de ani (57). Și Renè Descartes a ținut seamă de rădăcinile complexe ale ecuațiilor. În geometria sa din 1637, el aplica o metodă grafică pentru rezolvarea ecuațiilor de gradul trei și patru, determinînd punctele de intersecție dintre o parabolă și un cerc (58). Cu această ocazie, el a remarcat că în cazul rădăcinilor complexe „cercul nu taie și nici nu atinge parabola în nici un punct". El a formulat interpretarea geometrică actuală a numerelor complexe, — pe care le numea „imaginare", — considerîndu-le *ca puncte* ce nu figurează în planul coordonatelor : „Aceasta dovedește că nu există nici o rădăcină, nici adevărată, nici falsă și că ele sînt toate imaginare". John Wallis a privit numerele imaginare din alt punct de vedere, dar tot geometric. În algebra sa, publicată în 1676, el a observat că ar fi posibil să se stabilească o corespondență biunivocă între numerele de forma $(a + bi)$, unde $(i = \sqrt{-1})$ și vectorii planului cartezian complex, oricare ar fi numerele reale a și b. Dar această interpretare apăruse atunci prea devreme, ca să poată fi înțeleasă și a trecut neobservată.

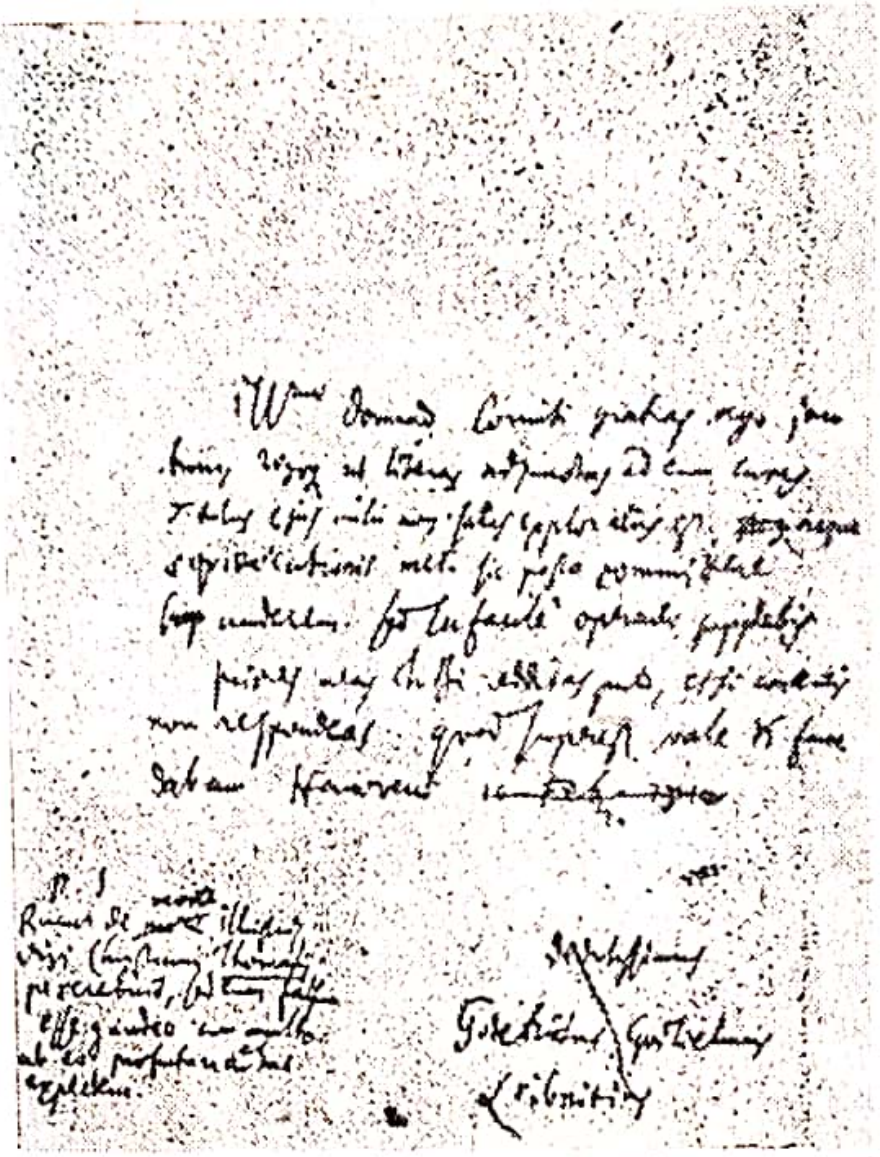
Pe Gottfried W. Leibniz (1646—1716) numerele imaginare au început să-l preocupe din 1675. Într-o scrisoare către Chr. Huygens el i-a transmis formula :

$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = 6$. Ca și Girard, el a folosit simbolul $\sqrt{-1}$ ca semn al unității imaginare, semn care a și intrat de atunci în circulație.

În *Acta Eruditorum* din 1702, Leibniz menționa următoarea descompunere :

$$x^4 + a^4 = (x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}).(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}).(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}).(x - a\sqrt{\sqrt{-1}})$$

Manuscris al lui Gottfried W. Leibniz



Însă aceste rezultate, pe care le-a considerat *minunate*, în loc să-l conducă spre o mai largă interpretare a noțiunii de număr, i-au îndreptat gîndurile pe cărările misticismului, privind numărul $\sqrt{-1}$ ca un simbol: „un amfibiu între existență și neant".

În 1707, A. de Moivre (1667—1754) a găsit o formulă trigonometrică care corespundea expresiei, în aparență imaginară: $\sqrt[n]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{-b}}$. El a arătat că această expresie depindea de diviziunea arcului de cerc în n părți egale și a dat rezultatului forma trigonometrică:

$$\sin A=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin nA+i\cos nA}+\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin nA-i\cos nA}.$$

În *Miscelanea analytica*, apărută la Londra în 1730, Moivre a studiat de asemenea expresia $\sqrt[n]{a+ib}$. Transformînd-o în

$\sqrt[n]{\cos A + i \sin A}$, el a arătat că orice număr real are n rădăcini de ordinul n, dintre care cel mult două sînt reale, iar restul complexe. Tot el a observat și legătura ce se poate stabili între extragerea rădăcinilor de diferite ordine din numerele complexe și împărțirea unui cerc în mai multe părți egale. În aceeași carte, a stabilit egalitatea care poartă azi numele de „formula lui Moivre" :

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na.$$

Ceva mai tîrziu, în 1752, Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717—1783), ocupîndu-se de problema rezistenței fluidelor, a ajuns la funcția complexă de variabile reale a și b :

$$f(a, b) + ig(a, b) \quad \text{unde } (i = \sqrt{-1}).$$

Analizînd-o mai îndeaproape, a demonstrat teorema : „Orice funcție, de ori cîte variabile complexe în număr finit, se poate presupune egală cu $p + qi$, unde p și q sînt numere reale, iar $i = \sqrt{-1}$".

Deși Euler nu credea în existența numerelor complexe, el a obținut remarcabile rezultate, exprimate prin formulele care legau variabilele complexe de cele reale. Astfel a fost stimulat interesul matematicienilor ca să caute o cale prin care să se stabilească existența acestor numere și să se justifice legitimitatea operațiilor cu numere complexe. În aceste preocupări, matematicienii erau încurajați de faptul că simbolul $\sqrt{-1}$ fusese folosit întotdeauna cu succes și nu condusese niciodată la rezultate contradictorii. Întrebarea ce se punea era dacă n-ar fi fost cazul să se revadă noțiunea de număr, ca să i se lărgească conținutul. Chiar dacă o asemenea idee a apărut la început confuză și a avut de așteptat încă un secol pînă să se clarifice în mod definitiv, părea de atunci natural să se considere că, dacă noțiunea de număr negativ a provenit din rezolvarea ecuațiilor algebrice de gradul întîi, aceea de număr complex trebuia să se nască o dată cu noțiunea de număr irațional, din rezolvarea ecuației de gradul al doilea, $\pm \sqrt{-1}$ fiind rădăcinile ecuației algebrice $x^2 + 1 = 0$, așa după cum $\pm \sqrt{2}$ sînt rădăcinile ecuației $x^2 - 2 = 0$.

Din 1777 Leonard Euler a început cercetările asupra funcțiilor de variabilă complexă. El a înlocuit prin litera „i" (inițiala cuvîntului imaginar) simbolul $\sqrt{-1}$ folosit de Leibniz. Dar acest simbol, care este adoptat azi în mod general, nu a intrat în circulația universală din 1777 cînd l-a introdus Euler, ci din 1801 cînd l-a întrebuințat Karl F. Gauss (1777—1855) (59).

În 1797, Gaspar Wessel prezenta Academiei regale a Danemarcei un memoriu în care arăta că numerele complexe de forma $(a + bi)$ (a și b numere reale și $i = \sqrt{-1}$) puteau fi privite ca niște vectori situați în planul complex (x 0 iy). Cu acești vectori, avînd originea comună în 0, se puteau face operații analoage cu ale numerelor reale, la care de altfel se și reduceau, în cazul particular cînd ei s-ar afla pe semiaxa reală. În acest mod, el a reușit să realizeze adunarea numerelor complexe, prin deplasarea paralelă a vectorilor și produsul numerelor complexe prin rotația vectorilor față de origine. În cazul înmulțirii numerelor complexe, era necesar să se considere și un vector unitate pe axa reală în sensul direct. Astfel s-a stabilit identitatea dintre vectorul „i" și vectorul obținut prin rotirea vectorului unitate, în sensul direct, în jurul originei 0, de un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$. Prin această operație, însăși relația $i^2 = -1$ căpăta un sens geometric, corespunzînd rotației vectorului i, în sens direct cu unghiul $\frac{\pi}{2}$, pînă ce acesta ajungea în poziția simetrică cu vectorul unitate față de axa Oy. Dar acest frumos articol al lui Wessel, care trezea din uitare ideile lui Wallis, născute cu mai bine de un secol în urmă, avea să zacă, uitat și el tot atîta vreme de aici înainte.

Mai mult noroc a avut în schimb Robert Argand, care, independent și fără să cunoască lucrarea lui Wessel, a publicat la Paris în 1806 o broșură nesemnată, cu titlul *Essai sur une maniere de representer les quantitees immaginaires* (Încercare de reprezentare a mărimilor imaginare). Această broșură ar fi trecut neobservată dacă nu ar fi intervenit matemati-

cianul J. F. Français, care a atras atenţia asupra ei, publicînd în 1813 o *Notă* în *Annales de Gergonne*, tome IV (60). Totuşi, nici chiar această nouă înfăţişare sub care erau prezentate numerele de forma $(a + bi)$ nu a reuşit să înlăture cu totul neîncrederea matematicienilor cu privire la existenţa lor. Aceasta se datora, în mare parte, autorităţii lui Descartes, Leibniz şi Euler, care susţinuseră odinioară că ele sînt numere *imaginate*, adică fictive. Abia după ce a apărut lucrarea lui K. F. Gauss (1777—1855) : *Theoria residorum biquadraticorum* (Teoria resturilor bipătratice), existenţa acestor numere nu a mai fost pusă la îndoială. Gauss a reuşit să stabilească, în mod definitiv şi cu o perfectă claritate, realitatea calculului cu numere complexe, bazîndu-se pe existenţa unei legi de reciprocitate a resturilor bipătratice cu totul analoagă cu legea de reciprocitate a resturilor pătratice. Această nouă lege impunea existenţa numerelor complexe* de forma $a + bi$, unde a şi b sînt numere întregi, iar $i = \sqrt{-1}$ la fel, după cum legea reciprocităţii resturilor pătratice** cerea existenţa întregilor 1, 2, 3... Gauss a ţinut chiar să observe că „obscuritatea misterioasă“ a numerelor imaginare a fost provocată de faptul că s-a abuzat de semnificarea cuvintelor „imaginar“ şi „imposibil“, prin care a fost denumită la început unitatea $i = \sqrt{-1}$. Notînd-o, ca şi Euler, cu litera „i“, el a numit-o „unitate imaginară“ sau „unitate laterală“ şi a pus în evidenţă faptul că pentru a stabili teoria numerelor întregi complexe, trebuie considerate *patru* unităţi diferite, anume : $+1$, -1, $+i$ şi $-i$, pe care le-a numit : *unitatea pozitivă*, *unitatea negativă*, *unitatea imaginară* (sau laterală) *pozitivă* şi *unitatea imaginară* (sau laterală) *negativă*.

---

* Gauss a introdus termenul de „numere complexe“ în sensul folosit azi pentru a numi astfel mulţimea numerelor în care se cuprind şi cele reale.

** Legea de reciprocitate a resturilor pătratice era privită de Gauss ca o „bijuterie matematică“, de aceea a şi intitulat-o *Theorema aureum* (Teorema de aur).

NUMĂRUL „e“

Mijlocul şi sfirşitul lămuresc cele netnţelese la început.

DENIS DIDEROT

Numărul „e“ a apărut în matematici pe la începutul secolului al XVII-lea şi a trezit de îndată un mare interes. Mai întîi din cauza strînsei lui legături cu sistemul de logaritmi descoperit de John Napier sau Neper (1550—1617) şi de Jobst Bürgi (1552—1632), în dorinţa de a pune la dispoziţia astronomilor şi a celor ce aveau de făcut multe calcule trigonometrice, un mijloc de simplificare a lor, iar mai tîrziu, ca şi numărul π, prin natura lui enigmatică. Despre „tabelele de logaritmi“ şi cum se operează cu ele ştie fiecare cîte ceva, dar nu oricine ştie ce este logaritmul unui număr şi că logaritmii folosiţi în mod curent nu-s chiar aceia descoperiţi de Neper (61).

Să amintim deci că „logaritmul unui număr x, *în baza* a, este numărul y care verifică egalitatea $x = a^y$“. Din definiţie rezultă că logaritmul unui număr dat depinde *de baza aleasă (a)*, fiindcă această bază stabileşte care-i exponentul (y) al puterii la care trebuie ridicată *baza* a, pentru ca a^y să fie egal cu numărul dat x. Logaritmii întîlniţi în şcoala medie şi folosiţi în viaţa de toate zilele sînt *logaritmii zecimali* cu alte cuvinte au ca bază numărul 10. În acest caz, se înţelege uşor de ce logaritmul lui 100 este 2: ($10^2 = 100$) sau de ce logaritmul lui 10 este 1 : ($10^1 = 10$) şi logaritmul lui 1 este zero ($10^0 = 1$). Desigur că nu tot aşa de uşor se poate cunoaşte care-i logaritmul lui 124! Matematicienii au stabilit o metodă de a calcula în mod aproximativ logaritmii

zecimali ai tuturor numerelor și, după ce i-au calculat i-au înscris în tabele. În cazul de față, căutînd în tabelele de logaritmi cu 5 zecimale exacte, se află că *logaritmul lui 124 = 2,09342.*

Acum, dacă s-ar referi la definiție, înseamnă că $10^{2,09342}$ este egal cu 124. Dar prin ce fel de calcule se ajunge la acest rezultat? O asemenea operație ca $10^{2,09342}$ e cam greu de înțeles, fiindcă ea nu seamănă de loc cu ridicarea la putere cînd exponentul este întreg! În acel caz e clar că $10^2 = 100$, căci $10^2 = 10 \times 10$. Dar cum să ridici 10 la o putere care nu-i întreagă? Dacă ar mai fi o putere fracționară, încă ar merge căci, de pildă $10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3}$; ba chiar dacă exponentul ar fi negativ tot s-ar mai putea înțelege ceva, fiindcă $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$! Dar așa? ce poate însemna 10 la o putere care se exprimă printr-un număr urmat de un șir de zecimale, finit sau infinit?

Problema se complică și mai mult în cazul logaritmilor descoperiți de Neper și Bürgi, unde însăși baza sistemului este acest număr „*e*" a cărui valoare este „aproximativ" 2, 718281. Însă, spre norocul omenirii și al matematicienilor, Neper habar nu avea că „minunatul lui sistem de logaritmi" — după cum i-a plăcut să-l numească — avea o „*bază*" și încă ce fel de bază! Atît Neper cît și Bürgi au reușit să creeze sistemul lor de logaritmi pornind de la observația că operațiile de înmulțire și împărțire dintre termenii unei progresii geometrice pot fi puse în corespondență cu operațiile de adunare și scădere dintre termenii corespunzători ai unei alte progresii aritmetice. Nu rămînea, deci, decît să se construiască tabele care să cuprindă termenii acestor două progresii puse față în față, astfel ca să se poată citi ușor numerele, ce erau privite ca făcînd parte din progresia aritmetică corespunzătoare numerelor din progresia geometrică ce aveau să se înmulțească sau să se împartă! Termenii din progresia aritmetică au fost numiți de Neper *logaritmii termenilor din progresia geometrică.* Cuvîntul compus din *logos = raport* și *aritmos = număr,* avînd ca semnificație :

„numărul aflat într-un anumit raport cu un altul (62). Pusă astfel, problema logaritmilor numerelor părea foarte simplă și, într-un fel, chiar și era. Dovadă sînt proprietățile logaritmilor care nu au scăpat neobservate de către matematicienii din secolele XV și XVI ca : Chuquet, Michael Stifel (1487—1567), Luca Pacioli ș. a. chiar mai înainte de apariția logaritmilor. Dar deși aceste proprietăți au fost remarcate în aplicații teoretice, nu s-au găsit logaritmii și nu s-a înțeles importanța lor practică, pentru că nu se cunoștea care-i logaritmul unui număr dat și nici nu se știa ce număr anume corespunde unui logaritm dat. Pentru ca logaritmii să aibă o utilitate practică, era necesar să se calculeze efectiv logaritmii numerelor și acest lucru era destul de complicat, ținînd seamă că în tabelele de logaritmi trebuiau să se afle logaritmii numerelor cît mai apropiate unele de altele. Or, aceasta cerea ca rația progresiei geometrice să fie foarte aproape de unu. John Neper a considerat ca rație a progresiei geometrice numărul $(1 - \frac{1}{10^7})$ și a avut nevoie de 20 de ani ca să calculeze tabela sa de logaritmi (63).

„Invenția logaritmilor a venit în lume ca un trăsnet din senin“ a scris un contemporan de-al lui Neper și a exprimat, cu adevărat, părerea unanimă de atunci, căci nimeni nu se aștepta la această descoperire, deși toată lumea aștepta să se găsească un mijloc de simplificare a calculelor. De aceea, imediat ce au apărut logaritmii, s-au și răspîndit cu iuțeala fantastică a fulgerului pentru acea epocă lipsită de mijloace rapide de informație, de circulație și mai ales de posibilități de calcul rapid.

Dar invenția logaritmilor nu a rămas numai în domeniul aplicațiilor practice. În acest domeniu s-au arătat de mai mare folos logaritmii zecimali calculați de Briggs. Logaritmii neperieni au intrat și în sfera preocupărilor teoretice, trezind curiozitatea matematicienilor cu privire la structura acestui nou operator matematic. Însuși Neper le arătase calea, definind logaritmul unui număr ca funcția $f(x)$ de argumentul x, a cărei viteză de creștere era invers proporțională cu x (64).

René Descartes

O pătrundere mai adîncă în structura intimă a numărului „*e*“ necesita un alt punct de vedere al logaritmului unui număr decît acela înfăţişat de Neper, care să fie legat de noţiunea de putere. Or, pe la începutul secolului al XVII-lea, calculele cu puteri se executau cu destulă greutate, din cauză că lipsea o notaţie potrivită (65).

Un avînt s-a observat după 1637, cînd Descartes a introdus notaţia exponenţială folosită acum şi după ce Isaac Newton a stabilit dezvoltarea binomului $(a + b)^n$ la puterile fracţionare ale lui n. Într-o scrisoare din 1676, adresată lui Leibniz, Newton considera cazul $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{8} \ldots$ De altfel, atît Newton cît şi Leibniz au folosit nu numai exponenţi fracţionari, ci chiar şi exponenţi variabili. Se poate constata aceasta dintr-o scrisoare, din 1679, pe care Leibniz a trimis-o lui Huygens. Aici se găsesc ecuaţii de forma : $x^x - x = a$. El le-a numit „expresii exponenţiale

transcendente", fiindcă nu au un grad determinat, exponentul însuși fiind necunoscut!

În 1643, G. Roberval (1602—1675) a observat că segmentele de arii ale hiperbolei echilaterale se comportau asemănător cu logaritmii numerelor, anume dacă abscisele creșteau în progresie geometrică, atunci ariile corespunzătoare lor creșteau în progresie aritmetică.

În 1647 Gregorius de St. Vincent a mers și mai departe. El a stabilit legătura dintre teoria logaritmilor și cvadratura hiperbolei, găsind că logaritmii lui Neper au ca *imagine geometrică* ariile segmentelor de hiperbolă echilateră cuprinse între o asimptotă și două paralele la cealaltă asimptotă. În 1668, N. Mercator (1620—1687) a depășit acest rezultat, arătînd în *Logarithmotehnia* că aria hiperbolei echilatere *se poate defini* cu ajutorul logaritmilor (66) și deci calculul tabelelor de logaritmi se putea reduce la acela al cvadraturii hiperbolei. El a introdus pentru logaritmii neperieni denumirea de *logaritm hiperbolic* sau de *logaritm natural* și a stabilit dezvoltarea în serie de puteri a funcției $1_n (1 + x)$ (67).

Isaac Newton, într-o scrisoare adresată în 1669 lui H. Oldenburg (1615—1677), a stabilit dezvoltarea în serie a funcției inverse funcției logaritmice, anume :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

El a considerat, totodată, și cazul particular ($x = 1$) al sumei serici $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!} + \ldots$*, arătînd că această sumă reprezintă numărul „al cărui logaritm natural este 1". Iată, așadar, *introdus și definit* numărul „e" ca limita sumei unei serii infinite de numere raționale.

De altfel, în 1676 ajunsese și Leibniz, independent de Newton, la dezvoltarea în serie de puteri a funcțiilor exponențiale e^x și e^{-x}.

---

* Prin notația 2!, 3! etc. trebuie înțeles produsul numerelor consecutive. Astfel $2! = 1 \cdot 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$;, iar prin $n!$ se notează prescurtat produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n$.

Într-o altă scrisoare, din 1690, adresată de Leibniz lui Chr. Huygens, el arăta că funcția definită prin integrala :

$$t = \int \frac{dx}{1-x^2} \text{ are forma : } b^t = \frac{1+x}{1-x}$$

și adăuga : „b este o mărime constantă al cărui logaritm este 1, logaritmul lui 1 fiind zero". Întîlnim în această scrisoare a lui Leibniz mai întîi o primă definiție a numărului „e", aceasta mai înainte ca litera „e", adică noțiunea de „bază" a sistemului de logaritmi să se fi pus în discuție. Apoi, definiția exponențială a logaritmului, deși nici această definiție nu este pusă în evidență.

Matematicienii s-au obișnuit repede cu asemenea expresii exponențiale. Între altele, ele au devenit obiectul de studiu al lui Johann Bernoulli, al altor membri din familia lui, precum și al elevului lui Johann Bernoulli, Leonard Euler. S-a ajuns astfel la generalizarea noțiunii de *putere a unui număr* cînd exponentul este un număr fracționar, sau chiar variabil și s-a precizat că există *două operații inverse* ale ridicării la o putere, perfect distincte una de alta. Una, fiind extragerea de un ordin oarecare a rădăcinii $\sqrt[x]{y} = a$, adică operația prin care *se caută baza* a, astfel ca $a^x = y$, x și y fiind numere date, alta, căutarea logaritmului lui y în baza $a : x = \log_a y$, adică operația prin care *se caută exponentul* x, așa fel ca să existe egalitatea $a^x = y$.

Leonard Euler a arătat, în cartea sa *Introductio in analysis infinitorum* din 1748, că prin logaritmul unui număr pozitiv N în baza a se înțelege exponentul x al puterii la care trebuie ridicată baza a, ca să se regăsească N, ceea ce revine la a scrie : $a^x = N$. El a folosit pentru prima oară cuvîntul *bază*, punînd astfel în evidență că operația de căutare a logaritmului unui număr este inversă aceleia de ridicare la o putere. Tot el este primul care a notat baza logaritmilor naturali cu litera „e" (68) și a introdus simbolul „l" pentru a nota logaritmul unui număr*.

* De obicei, logaritmul neperian al unui număr se notează cu ln.

Mai tîrziu, în 1728, Daniel Bernoulli (1700—1782) a stabilit formula $e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ Ea lărgește sensul seriei numerice, stabilită de Newton :

$$(1) \qquad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

legîndu-i suma ei de o formă exponențială.

În 1743 Euler a generalizat rezultatul lui D. Bernoulli prin formula :

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

unde x este un număr natural.

Logaritmii numerelor complexe au apărut mai întîi prin procesul de integrare a funcțiilor raționale și după aceea, logaritmii acestor numere au găsit numeroase aplicații. De altfel, în cîmpul numerelor complexe, anumite expresii au un caracter mai general decît în cîmpul numerelor reale (69). Euler a definit logaritmul unui număr complex $z = r(\cos x + i \sin x)$ prin : $\ln z = \ln r + i(x + 2k)$, unde $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ și a pus în evidență legătura ce există între funcțiile trigonometrice și cea exponențială, prin formula redescoperită de el : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. (70). Pentru $x = \pi$ el a găsit o formulă celebră : $e^{i\pi} = -1$, atît prin relația nebănuită pînă atunci între numerele „e“ și „i“, cît și prin contribuția ei la identificarea numărului π. În 1743 Euler deduce, pornind de la aceeași formulă exponențială :

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Datele asupra numărului „e“ ar fi necomplete dacă nu am arăta și dezvoltarea în fracție continuă regulată, stabilită în 1714 de Roger Cotes (1682—1716) în *Harmonia mensurarum*, publicată postum în 1722 :

Leonard Euler

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}}$$

Teoria fracţiilor continue a fost stabilită, pe cale analitică, în 1737 de Euler. El a dovedit că toate numerele raţionale se dezvoltă în fracţii continue, regulate* şi finite şi a remarcat că numerele iraţionale, provenite din rădăcina patrată a unui număr, se dezvoltă în fracţii continue, infinite, regulate şi periodice. Şi invers, orice fracţie continuă, infinită, regulată** şi periodică, reprezintă un număr iraţional, rădă-

* O fracţie continuă se numeşte *regulată* dacă toţi numărătorii parţiali succesivi sînt egali cu unitatea.

** Prin fracţie continuă infinită regulată se înţelege acea fracţie în care toţi numărătorii parţiali sînt egali, iar numitorii parţiali sînt numere naturale.

cină a unei ecuații de gradul al doilea cu coeficienți întregi. Euler a regăsit dezvoltarea în fracție continuă și regulată a numărului „e" și a mai stabilit alta, de data aceasta nu regulată ci generală:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + 4 \ldots}}}}$$

Totodată, el a dezvoltat în fracție continuă regulată pe:

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ldots}}}}$$

sau pe:

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ldots}}}$$

precum și alte expresii în care apare numărul „e" ca: $\sqrt{e}$, $\frac{e^2-1}{2}$ etc. El a demonstrat convergența acestor două fracții continue și, în același timp, iraționalitatea lui „e" și a lui e^2.

Demonstrația iraționalității lui e și a lui e^2, dată de Euler în 1737 și bazată pe reprezentarea lui e și a lui e^2 în fracții continui infinite, nu a convins pe matematicieni. O alta, mai riguroasă, a fost găsită în 1768 de J. H. Lambert (1728—1777), folosind dezvoltarea în fracție continuă a funcției $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, el stăruind îndeosebi asupra faptului că „mărimile

circulare și logaritmice nu pot fi rădăcinile unor ecuații raționale".

Această demonstrație a fost completată apoi de A. M. Legendre (1752—1833) în vestita sa carte publicată sub titlul: *Essai sur les nombres* (Încercări asupra numerelor), în 1789. Însă abia în 1815, J. B. J. Fourier (1768—1830) a stabilit în mod direct, prin metoda de reducere la absurd, că numărul „*e*" este irațional. Demonstrația, foarte simplă și elegantă, se baza pe dezvoltarea în serie a lui *e*:

$$(1)\quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.$$

Ea merită amintită aici, dacă nu de alta, cel puțin pentru că urmează îndeaproape calea bătătorită cu mai bine de 2 000 de ani de către geometrii greci: „Dacă numărul *e* ar fi rațional, adică s-ar exprima printr-o fracție $\frac{p}{q}$, unde *p* și *q* sînt numere naturale, atunci va exista printre numitorii din dezvoltarea (1) un $N!$ care să se dividă cu *q*. Acest $N!$ nu poate fi mai mare ca 2, căci se știe că $2 < e < 3$. Așadar *N* poate fi cel mult egal cu 2. În acest caz, produsul $e \cdot 2$ ar trebui să fie un număr întreg. Dar înmulțind ambii membri din (1) cu 2, avem:

$$e.2! = 2 + 2 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4.} + \frac{1}{3.4.5.} + \ldots$$ însă suma

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3.4.} + \frac{1}{3.4.5.} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

Apare, așadar, o contradicție! Produsul $e.2!$ nu este un număr întreg, ci cuprins între 5 și $5 + \frac{1}{2} : 5 < e.2! < 5 + \frac{1}{2}$

În 1884 R. Lipschitz (1832—1903) a stabilit o reprezentare a funcției exponențiale e^z, *z* fiind o variabilă complexă ($z = a + bi$), sub forma unui produs infinit:

$$e^{\frac{-z}{1-z}} = (1 - z)^{-1}.(1 - z^2)^{\frac{\varphi(2)}{2}}.(1 - z^3)^{\frac{\varphi(3)}{3}} \ldots$$

$$e^{\frac{-z}{1-z}} = (1-z)^{-1}.(1 - z^2)^{\frac{1-\varphi(2)}{2}}.(1 - z^3)^{\frac{\varphi(3)}{3}} \ldots$$

Produsele de mai sus ar cere o explicație. Nu-i cazul să o dăm aici, fiindcă aceste produse au fost arătate numai ca să se poată compara forma lor așa de complicată cu expresia analoagă, așa de simplă, găsită de Wallis, pentru numărul π.

Am văzut mai înainte că în 1761 J. H. Lambert a stabilit o reprezentare în fracție continuă infinită a numărului π. Asemenea reprezentări ale numărului π fuseseră de altfel găsite și de Euler care folosise metoda de dezvoltare în fracție continuă a numărului „*e*" ca să demonstreze iraționalitatea lui. Tocmai această descoperire a lui Euler, l-a făcut pe Lambert să urmeze aceeași cale ca să cerceteze și iraționalitatea numărului π. Ideea călăuzitoare a fost o teoremă enunțată de Lagny în 1719, anume că dacă tangenta trigonometrică a unui arc este un număr irațional, atunci arcul este rațional. Mai întîi, Lambert a aflat următoarea dezvoltare în fracție continuă a $\operatorname{tg}\frac{1}{n}$:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{n} = \cfrac{1}{n-\cfrac{1}{3n-\cfrac{1}{5n-\cfrac{1}{7n\ldots}}}} \qquad (n = 1,2\ldots)$$

care dovedește cu adevărat că la tangenta unui arc rațional $\frac{1}{n}$, corespunde un număr irațional exprimat prin fracția continuă nelimitată stabilită aici. Dovedind că și reciproca teoremei lui Lagny este adevărată, Lambert a tras concluzia că, din relația $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, unde tangenta arcului $\frac{\pi}{4}$ este un număr rațional, rezultă că $\frac{\pi}{4}$ este un număr irațional. Această ingenioasă demonstrație a iraționalității numărului π a fost reluată în 1794 de către Legendre, care a adăugat la cele afirmate de Lambert și iraționalitatea lui π^2.

Așadar, la sfîrșitul veacului al XVIII-lea, matematicienii știau cu precizie că numerele „*e*" și π sînt iraționale. Se vor

mulțumi cu atît? Sau vor vedea în aceste rezultate noi posibilități de a dezvolta teoria analitică a numerelor? Prin demonstrarea iraționalității numărului π, deși s-a făcut un pas înainte, problema cvadraturii cercului cu rigla și compasul rămînea mai departe tot nedecidabilă. Aceasta, întrucît se cunoșteau destule numere iraționale ce puteau fi construite cu rigla și compasul. La fel s-ar putea întîmpla și cu numărul π, dacă el ar proveni din rezolvarea treptată a unui șir finit de ecuații de gradul al doilea. În concluzie, se impuneau alte și noi cercetări asupra numerelor.

NUMĂRUL „C“

Atunci cînd raţiunea respinge o teză, ea creează teza opusă. Şi cînd respinge, în acelaşi timp, cele două teze opuse, atunci ea ne promite ceva mai profund, cu condiţia ca să o urmăm, aşa de departe cît poate merge ea.

G. W. LEIBNIZ

Leonard Euler a întîlnit întîia oară numărul „C“ în tovărăşia unei serii divergente, prin 1734. Tovărăşia i s-a părut suspectă aşa că, atît el cît şi alţi matematicieni, au fost curioşi să-i stabilească identitatea. Dar toate cercetările întreprinse de atunci nu au dus la nici un rezultat precis şi misteriosul număr *C*, poreclit *constanta lui Euler*, continuă să-şi păstreze secretul pînă azi. Ca să putem urmări aceste peripeţii, este necesar să ştim că o serie infinită se înfăţişează ca o expresie de forma $a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots$ unde a_1, a_2..., se numesc termenii seriei, iar a_n, *termenul general*, fiindcă el arată că se pot obţine toţi termenii seriei, prin înlocuirea indicelui n respectiv cu numerele 1, 2, 3... Dacă a_1, a_2... sînt numere, seria este numerică, iar dacă a_1, a_2... sînt funcţii (de pildă puteri ale unei variabile) seria se numeşte *de funcţii* (respectiv, serie de puteri).

Seriile de puteri au fost cunoscute din antichitate (71); proprietatea lor de a se prezenta ca un polinom algebric infinit, a trezit interesul matematicienilor din a doua jumătate a secolului al XVII-lea. Din 1668, după ce N. Mercator a descoperit seria logaritmică, prin care se stabilea legătura dintre funcţia logaritmică şi aria hiperbolei echilatere, problema seriilor infinite a trecut brusc în centrul preocupărilor de atunci şi de mai tîrziu. De fapt, cu un an mai înainte, James Gregory determinase, în cartea sa *Vera circuli et*

hyperbolae quadratura, dezvoltările în serie de puteri ale funcţiilor tg x şi cos x şi arătase, pentru prima oară, deosebirea ce exista între o serie *convergentă* şi alta *divergentă*, însă acestei lucrări nu i s-a dat atenţia cuvenită, din cauza controversei lui cu Huygens. Din manuscrisul rămas de la Gregory s-a putut preciza că el a găsit şi formula generalizată a dezvoltării binomului, formulă care a fost descoperită şi de Newton. Newton a comunicat acest rezultat lui H. Oldenburg, pe atunci secretarul Societăţii regale din Londra, printr-o scrisoare din 1676, şi, în acelaşi timp, lui Leibniz. Mai înainte, printr-o altă scrisoare din 1669, adresată de Newton profesorului său I. Barrow (1630—1677), el i-a arătat că a obţinut anumite dezvoltări în serii de puteri, ca de pildă, aceea a funcţiei arc sin x:

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7} + \dots$$

În aceeaşi scrisoare Newton observa că, prin dezvoltarea funcţiilor respective în serii de puteri, se pot efectua cvadraturi, cubaturi şi rectificări de curbe. Mai mult, el a stabilit şi o metodă de „inversare a seriilor", obţinînd astfel alte serii infinite ce corespundeau funcţiilor transcendente cunoscute atunci. De pildă, prin inversarea seriei logaritmice, el a descoperit dezvoltarea în serie a funcţiei exponenţiale e^x, dezvoltare pe care am amintit-o în capitolul trecut. Tot aşa, prin inversarea seriei pentru „arc sin x" Newton a găsit seria corespunzătoare funcţiei „sin x", etc. Aceste descoperiri ale lui Newton au fost publicate abia în 1711, sub titlul: *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Analiza prin ecuaţii cu un număr infinit de termeni).

Fiind pus la curent cu o parte din rezultatele lui Newton, J. Gregory a reuşit să stabilească şi el, în 1671, dezvoltarea în serie a funcţiilor „arc tg x"; „sec x"; „*ln* tg x"; „$ln \frac{1+x}{1-x}$" etc. Dintre aceste serii vom reţine următoarea dezvoltare:

Gottfried W. Leibniz

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots$$

pentru că ea va mai interveni în discuție.

După ce Leibniz a fost la Londra, unde a aflat despre seria lui Mercator, el a folosit din plin procedeele de dezvoltare în serie și astfel, printre alte serii, a obținut, în 1674, pe aceea legată de problema cvadraturii cercului $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ (72) care-i poartă și numele.

Între 1689 și 1704, Jacob Bernoulli a sistematizat teoria seriilor infinite în cinci articole intitulate: *Propoziliones arilhmelicae de seriebus infinilis aerumque summa finila* (Propoziții aritmetice despre seriile infinite și despre sumele lor finite). În aceste articole s-au strecurat și cîteva greșeli, provenite din folosirea unor serii divergente drept convergente. Aceste confuzii erau însă obișnuite în perioada de început a folosirii seriilor și însuși marele Euler a păcătuit uneori

în privința rigurozității, deși, din întîmplare sau poate din noroc, rezultatele importante pe care le-a stabilit el în legătură cu seriile s-au dovedit a fi fost exacte. După succesele obținute de Newton, Leibniz și alții care folosiseră în calculele lor numai serii convergente, cu toate că noțiunea aceasta nu era încă bine precizată, aplicarea în calcule a seriilor devenise o pasiune pentru matematicienii din secolulal XVIII-lea. Ea îi obseda într-atîta că încercau să găsească explicații filosofice atunci cînd ajungeau la absurdități provocate numai din cauza divergenței seriilor cu care operau. În asemenea condiții era natural să izbucnească *scandalul seriilor divergente*. Semnalul l-a dat *N. Abel* (1802—1829) care a scris în 1826 că : „seriile divergente sînt, în totalitatea lor, o invenție a diavolului". Nici că ar fi putut fi dată o mai bună caracterizare a haosului pe care-l adusese în Analiză mulțimea paradoxelor și a confuziilor comise, abuzîndu-se de serii, fără nici un discernămînt! Dar despre ce fel de confuzie este vorba? Iată despre ce : Pînă la folosirea *seriilor infinite*, matematicienii operau numai cu sume sau produse formate dintr-un număr finit de termeni. Toate regulile de calcul numeric ale aritmeticii au fost stabilite numai în acest sens, adică numai pentru operații cu un *număr finit* de termeni, oricît de mare ar fi fost el. De altfel, cum s-ar putea aduna pe calea obișnuită a aritmeticii un număr infinit de termeni, cînd viața noastră este finită în timp? Că matematicienii au reușit să sumeze o serie cu un număr infinit de termeni, asta-i altceva! Au făcut-o introducînd un *nou procedeu de calcul* numit *trecere la limită*. În acest caz, se consideră suma parțială a primilor n termeni : $(a_1 + a_2 + \dots a_n) = S_n$, n fiind considerat un număr oarecare. Această *sumă parțială*, care depinde de numărul n al termenilor, decide de *convergența* sau *divergența* seriei. Anume, suma seriei infinite *există* prin definiție, dacă *există limita lui* $S_n = A$, cînd n devine infinit și atunci seria se numește *convergentă*. Dacă însă suma parțială $S_n = a_1 + a_2 + \dots a_n$, crește peste orice număr, oricît de mare ar fi el, cînd numărul n al termenilor crește nelimitat ($\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$) sau, cînd limita sumei nu este bine

determinată $\left(\lim_{n\to\infty} S_n = \left\{\frac{A}{B}\right.\right)$, atunci seria este *divergentă*. De exemplu, suma seriei (1)

(1) $\qquad 1 + x + x^2 + x^3 \ldots + x^n + \ldots$

există numai dacă $|x| < 1$, fiind vorba de seria geometrică cu raţia mai mică decît unitatea. În acest caz, seria (1) este *convergentă* şi se poate scrie egalitatea :

(2) $\quad 1 + x + x^2 \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$, adică

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-x}$ dacă $|x| < 1$.

Egalitatea are sens şi se aplică la toate seriile numerice obţinute din (1), dacă se înlocuieşte variabil x cu un număr < 1. De pildă, dacă $x = \frac{1}{2}$ există egalitatea

(2) $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2^n} + \ldots = 2$, adică suma infinită (1) are o valoare *finită* sau are sens! Dar dacă $x = 1$ sau orice număr mai mare decît 1, *seria este divergentă* şi egalitatea (2) *nu mai există* fiindcă suma infinită (1) : $1+x+x^2+ \ldots$ creşte peste orice limită. De pildă, pentru $x = 2$ expresia infinită (1) nu are sens şi dacă am aplica formula (2), din ea ar rezulta că: $1 + 2 + 3 + 8 + \ldots = -1$! Tot divergentă este seria (1) şi dacă $x = -1$. În acest caz, deşi suma ei este finită, *ea nu este determinată*, căci suma infinită $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots = \left\{\frac{0}{1}\right.$ poate avea valoarea zero sau 1, după cum se adună un număr par sau impar de termeni (73). Trebuie să menţionăm că, de cele mai multe ori, suma unei serii nu se poate calcula sau stabili aşa de uşor ca în cazul (1). În schimb, se poate cunoaşte cu precizie dacă o serie este sau nu convertă, prin aşa-numitele *criterii de convergenţă* ale seriilor. La aceste rezultate s-a ajuns după ce alarma dată de Niels Abel a fost auzită de C. F. Gauss, J. L. Lagrange (1736—1813) şi mai ales de

către A. L. Cauchy (1789—1857) care, în cursul său de Analiză, tipărit în 1821, a precizat condițiile de convergență ale seriilor (74). Dar obligația de a cerceta în prealabil convergența seriilor nu a îndepărtat pe matematicienii de seriile divergente! Seria armonică este, în această privință, un caz celebru. Expresia $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}+\ldots$ se numește serie armonică din cauză că trei termeni consecutivi ai ei sînt în progresie armonică.

Amintim că *media armonică* între 3 numere: a, b, c este prin definiție $b=\frac{2ac}{a+c}$. În cazul de față se verifică relația:

$$\frac{1}{n}=\frac{2\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}}.$$

Seria armonică a fost studiată atît de frați Bernoulli cît și de Euler. În 1689 Iacob Bernoulli a stabilit că seria este divergentă și faptul a fost confirmat în 1713 printr-o nouă demonstrație a divergenței ei, de către Ioan Bernoulli.

În aceste condiții, se înțelege cît de mare trebuie să fi fost surpriza matematicienilor cînd Leonard Euler a anunțat, în 1734, că, deși seria armonică este divergentă, adică $\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$, diferența între sumă parțială S_n și ln.n are o limită finită „C", atunci cînd $n\to\infty$; adică, există relația:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln.n\right)=C.$$

Euler a calculat valoarea acestei constante determinîndui primele 6 zecimale. Totodată, el a mai stabilit și alte formule prin care se exprimă constanta „C", ca de pildă:

$$C = \frac{1}{2} S_2 - \frac{1}{3} S_3 + \frac{1}{4} S_4^* \ldots \text{ sau :}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right) +$$

$$+ \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right)$$

Într-o scrisoare pe care a adresat-o prietenului său Chr. Goldbach (1690-1764), Euler îi arăta cum a descoperit formula

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1^{**}}{n} = \ln (n+1) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^3} +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^4} \ldots + \ldots$$

din care, transformînd-o în alta aproximativă :

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} \simeq \ln (n+1) + C$$

a reuşit să obţină, pentru $n = 10$, primile 16 zecimale ale constantei C, anume : $C = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,9$.

Această constantă C, care va deveni după π şi „e“ una dintre cele mai interesante din Analiză, fiindcă va apare în multe formule şi aplicaţii ale calculului integral, l-a

---

* Prin S_2, S_3 etc. se înţelege seria pătratelor, respectiv puterilor a treia a termenilor din seria armonică, adică :

$$S_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{n^2} + \ldots \quad S_3 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots \text{ etc.}$$

** Prin simbolul $\sum_{1-1}^{n}$ se notează de obicei, în mod prescurtat, suma primilor „n“ termeni (de la $n = 1, 2. .$) dintr-un şir, exprimat prin termenul lui general. În cazul de faţă avem :

$$\sum_{n-1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}.$$

preocupat îndeosebi pe Euler. Dovadă un articol intitulat *Numere memorabile*, apărut în 1781, în care el prezintă chiar și încercările nereușite pe care le-a făcut ca să se afle dacă nu cumva „C" ar fi logaritmul vreunui alt număr însemnat! Totodată, în acest articol, Euler menționează alte formule interesante legate de „C", ca de pildă:

$$1 - C = \frac{1}{2}(S_2 - 1) + \frac{1}{3}(S_3 - 1) + \frac{1}{4}(S_4 - 1) + \ldots$$

[sau $2C - 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}S_2\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}S_4\right) +$

$$+ \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{2}{7}S_6\right) + \ldots$$

Nici Euler și nici urmașii lui nu au putut stabili dacă „C" este un număr rațional, sau irațional, deși el a fost reprezentat în numeroase alte chipuri analitice.

Printre seriile numerice care au ca sumă numărul „C", un răsunet deosebit l-a avut seria stabilită oarecum empiric de Gregorio Fontana (1735—1803) și publicată în 1790 de L. Mascheroni (1750—1800). El a notat constanta lui Euler cu litera „A", așa că, păstrînd notația originală, seria are forma:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 3^3 4} + \ldots$$

Legea de formare a termenilor acestei serii a fost cunoscută abia în 1812, cînd ea a fost stabilită în mod riguros, de F. W. Bessel (1784—1846) (75).

Cu ajutorul acestei serii, Mascheroni a calculat 32 de zecimale ale lui „C", dar dintre acestea numai 19 au fost exacte.

Vom vedea mai departe în ce direcții s-au îndreptat străduințile matematicienilor din secolul al XIX-lea, ca să găsească care-i natura numărului „C". Dar, deși în acest secol s-a reușit să se afle totul despre natura numerelor „e" și π, natura numărului „C" a rămas o taină nedescoperită chiar nici în prima jumătate a secolului nostru!

Fără să aducă nici o lumină în privința naturii numărului „C", notăm ca remarcabilă expresia găsită în 1924 de J. C. Kluyver, unde numărul „C" se prezintă ca limita unui determinant, elementele lui fiind din nou termenii seriei armonice :

$$C = -\lim_{n\to\infty} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{1} \end{vmatrix}$$

DIN NOU DESPRE NUMERELE, „e“ ŞI „C“

Se pare că ştiinţa procedează, ca şi Dante în frumosul său poem : în cercuri succesive.

GASTON DARBOUX

După cum s-a văzut, începînd din secolul al XVII-lea şi continuînd în decursul celui de al XVIII-lea, seriile infinite de puteri au ţinut un loc de frunte în cercetările matematicienilor, pentru că prin ele, complicatele funcţii trigonometrice, exponenţiale sau de oricare altă natură decît cele algebrice întregi, se puteau aproxima, adică înlocui, printr-un „polinom“ cu coeficienţi raţionali. Urma, în mod firesc, ca să se aplice această metodă şi pentru a stabili dezvoltări în serii de puteri ale numerelor π şi „e“. Se spera astfel, nu numai să se calculeze un număr cît mai mare de zecimale ale lor, ci, mai ales, să se găsească o cale de a sonda natura acestor numere. Din lucrările lui Wallis, continuate apoi şi de alţi matematicieni, se ştia de pildă că fracţiile zecimale periodice reprezintă numere raţionale. În lipsa altor demonstraţii, dezvoltările în serii de puteri ale acestor două numere ar fi putut furniza destul de multe zecimale, din care să se descopere vreo eventuală periodicitate şi astfel, să se cunoască dacă vreunul dintre aceste două numere ar fi fost raţional. Astfel, din seria descoperită de Newton, pentru funcţia arc sin x :

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

Isaac Newton

rezultă, prin înlocuirea lui x cu $\frac{1}{2}$*, o dezvoltare a numărului π în seria numerică infinită:

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{3}{2^7 \cdot 5} + \frac{5}{2^{10} \cdot 7} + \ldots$$

Din această serie s-au calculat cu ușurință primele 14 zecimale ale numărului π (76). Pe la începutul secolului al XVIII-lea Abraham Sharp (1651—1742) a folosit seria I descoperită de Gregory: $\operatorname{arc\,tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$,

în care a înlocuit pe x prin $\sqrt{\frac{1}{3}}$

---

* Căci $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, deci: $\frac{\pi}{6} = \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{2}$.

(căci) $\sqrt{\frac{1}{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ și deci arc tg $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{6}$) și obține astfel o nouă dezvoltare în serie a numărului π:

$$(1)\quad \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \ldots\right)$$

care i-a permis să stabilească primele 72 de zecimale exacte ale numărului π.

Cam în același timp, John Machin (1685—1715) a realizat o și mai mare precizie în determinarea numărului π, ajungînd pînă la 100 de zecimale. El a folosit formula:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}$$

care arată că un arc de cerc a cărui tangentă trigonometrică este rațională se poate împărți în alte două arce ale căror tangente sînt și ele raționale. Pornind de la: arc tg $1 = \frac{\pi}{4}$ și aplicînd acest procedeu de mai multe ori consecutiv, el a stabilit că:

$$\frac{\pi}{4} = 4\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}.$$

Dezvoltînd fiecare dintre funcțiile arc tg $\frac{1}{5}$ și arc tg $\frac{1}{239}$ în serie după formula lui Gregory, Machin a ajuns la următoarea dezvoltare a numărului π:

$$(2)\quad \frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \ldots\right)$$

Această serie a fost publicată în 1706 de W. Jones în *Synopsis palmariorum matheseus*, fără a se indica și metoda folosită pentru a o stabili. În această lucrare W. Jones a întrebuințat

pentru prima dată și notația π pentru raportul dintre lungimea cercului și diametrul său, dar această notație a trecut atunci aproape neobservată. Ea a intrat în mod definitiv în circulație, abia după ce Euler a introdus-o, cu aceeași semnificație, în cursul său de mecanică, publicat în 1736.

În 1719 F. T. Lagny (1660—1734) a obținut 127 de zecimale ale lui π, folosind din nou formula (1) găsită de Sharp. Și metoda lui Machin a fost reluată de Euler ca să stabilească alte serii numerice și mai repede convergente pentru numărul π. De pildă, bazîndu-se pe formula :

$\operatorname{arc\,tg}\ 1 = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$, el a dedus dezvoltarea :

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \ldots\right).$$

Această serie a fost publicată de Ch. Hutton (1737—1776) în 1776 și de Euler în 1779. Cu ajutorul ei, Euler a calculat într-un timp destul de scurt — vreo 80 de ore — cele 128 de zecimale găsite de Lagny, descoperind și îndreptînd astfel o greșală strecurată la zecimala a 113-a unde era notat „8“, ceea ce corect ar fi trebuit să fie „7“ !

Atît Hutton cît și Euler au mai stabilit încă o formulă comodă pentru calcularea numărului π, anume :

$$\frac{\pi}{4} = 5\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + 2\ \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{79}.$$

Cu această formulă, Euler a calculat, numai într-o oră, 20 de zecimale ale lui π.

În 1789, C. F. Vega (1756—1802) a folosit formula

(3) $$\frac{\pi}{4} = 2\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$$

împingînd aproximaţia pînă la a 143-a zecimală, dar ulterior s-a dovedit că numai 126 de cifre erau exact calculate (77).

Interesant de observat că rezultatele obţinute prin toate aceste dezvoltări în serie ale numărului π au fost valabile numai pentru că valorile date argumentului rămîneau între limitele de convergenţă ale seriilor respective, dar atunci nici Euler şi nici ceilalţi matematicieni nu au pus problema convergenţei seriilor stabilite de ei; cu alte cuvinte, ei nu s-au întrebat între ce limite ale argumentului rămîn valabile aceste dezvoltări în serie şi nici care-i eroarea comisă prin neglijarea restului seriei! Întrucît în numărul de zecimale obţinut pentru π nu se observase nici un fel de periodicitate, — care totuşi ar fi putut exista, — calculele au continuat şi în cursul veacului al XIX-lea, cînd vom asista la o adevărată vînătoare a zecimalelor numărului π. Astfel, în 1841 W. Rutherford a calculat 208 zecimale ale lui π, dintre care numai 152 s-au dovedit exacte, iar Z. Dase, în 1853, a ajuns la 440 zecimale exacte prin formula:

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\frac{1}{5} + \text{arc tg}\,\frac{1}{8}.$$

Value of $\pi = 3$.

14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46 95 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05555
64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165
27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 30920 96282 92540 91715 36436 78925 90360
01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094 33057 27036 57595 91953
09218 61173 81932 61179 31051 18548 07446 23799 62749 56735 18857 52724
89122 79381 83011 94912 98336 73362 44065 66430 86021 39501 60924 48077
23094 36285 53096 62027 55693 97986 95022 24749 96206 07497 03041 23663
86169 51100 89202 38377 02131 41694 11902 98858 25446 81639 79990 46594
00681 70029 63123 77387 34208 41307 91451 18398 05709 85 &c.

Cele 707 zecimale ale lui π, calculate de William Shaks

William Shaks (1812—1882) a băut însă recordul, întîi tot în 1853 cu 607 zecimale și apoi, în 1873, propriul său record cu 707 cifre exacte, (78) calculate după formula (2).

În aceleași timp și zecimalele numărului „e" au fost urmărite cu aceeași febrilă curiozitate. Începutul l-a făcut Euler, calculînd în 1728 primele 23 de zecimale ale numărului „e" prin seria cunoscută:

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Peste 120 de ani, W. Shanks a calculat 205 zecimale ale numărului „e", iar în 1884 J. M. Boorman a stabilit 346 zecimale ale aceluiași număr, arătînd totodată că rezultatul lui se acorda cu al lui Shanks pînă la a 187-a zecimală.

E inutil să adăugăm că nici în zecimalele numărului „e" nu s-a observat vreo periodicitate, după cum mai tîrziu nu se va găsi acest lucru nici în cazul constantei „C".

Cercetarea zecimalelor lui „C" a continuat în cursul veacului al XIX-lea, paralel cu al celorlalte două numere „favorite" π și „e". C. F. Gauss a calculat 40 de zecimale ale lui „C", pornind de la una dintre dezvoltările în serie stabilite de Euler deși el însuși a observat că, e cam dubioasă convergența acelei serii folosită de el!

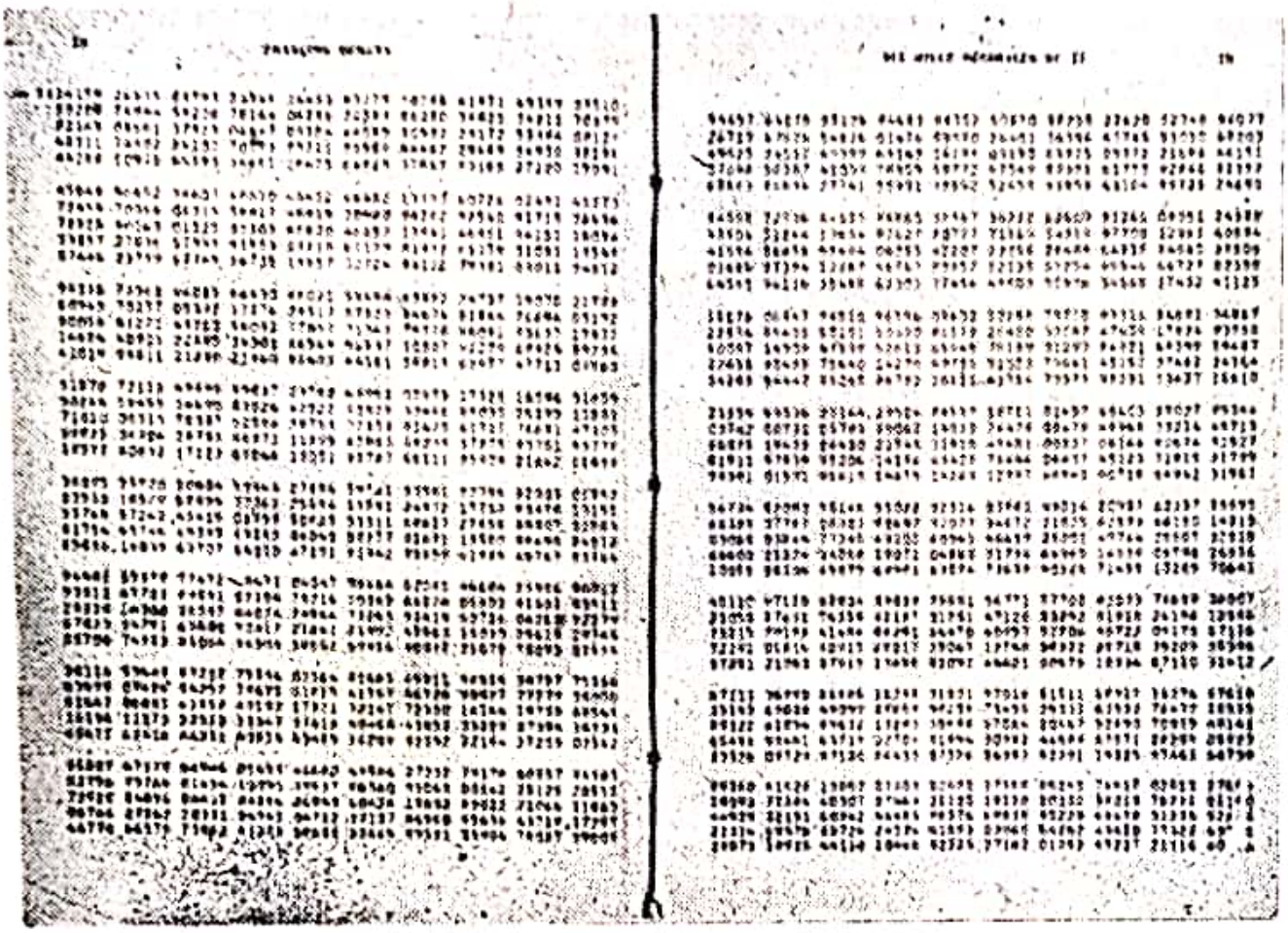
În 1867 W. Shanks a determinat 59 de zecimale, apoi 80 și în fine, în 1872, 110 zecimale ale constantei „C", însă despre ele Glaisher a afirmat că exacte ar fi numai primele 59! Oricum, nici din cele 59 de zecimale exacte nu s-a putut stabili vreo periodicitate în distribuirea zecimalelor și de aceea J. C. Adams (1819—1892) a calculat 263 de zecimale, care au condus la aceeași concluzie.

După cum am mai spus, tentativa de folosire a seriilor, pentru a pătrunde în structura intimă a acestor trei numere, era o urmare firească a rezultatului stabilit de J. Wallis în Algebra sa din 1685, anume că fiecare număr rațional se exprimă printr-o fracție zecimală periodică. Deși reciproca acestei teoreme a fost demonstrată abia în 1885 de către O. Stolz (1842—1905), matematicienii o admiteau în mod implicit,

considerînd că orice fracție zecimală periodică nu poate reprezenta decît un număr rațional. Din punct de vedere practic, calcularea zecimalelor pornind de la diferitele dezvoltări în serii de puteri era cea mai indicată, operația aceasta fiind mult mai ușoară decît ar fi fost, de pildă, stabilirea iraționalității prin dezvoltarea lor în fracții continue infinite. Aceasta explică și avîntul pe care l-au cunoscut seriile. Și dacă în cursul secolului al XVIII-lea s-au strecurat prin calcule multe serii numerice divergente (79), abuzul a avut și un efect pozitiv. Datorită lui s-a insistat în precizarea noțiunii de convergență a seriilor și astfel s-a lărgit perspectiva asupra conceptului de număr. Din studiul seriilor s-a înțeles că numerele iraționale pot fi considerate și ca limita unor serii infinite convergente de numere raționale. Începînd din a doua jumătate a secolului al XIX-lea, matematicienii își vor pune întrebarea, ocolită pînă atunci : „Ce sînt și ce reprezintă numerele"? Chiar în acest fel : „Was sind und was sollen die Zahlen"? — întrebarea apare ca titlu al unei cărți celebre, publicată în anul 1888 de către Richard Dedekind (1831—1916). Cartea era urmarea alteia, scrisă de el în 1872 : *Stetigkeit und irrationele Zahlen* (Continuitate și numerele iraționale). În prefața acestei prime lucrări, autorul mărturisește motivul care l-a îndemnat să studieze mai îndeaproape problema numerelor reale, arătînd că, în 1858, cînd a fost numit profesor de Analiză Infinitezimală la Politehnica din Zürich și a încercat să expună elementele calculului diferențial, a simțit „mai acut ca oricînd lipsa unei baze științifice a aritmeticii".

Aceeași întrebare asupra numerelor iraționale l-a frămîntat tot pe atunci și pe Charles Méray (1835—1911). În 1869 el a publicat, pentru prima oară, o teorie riguroasă a numerelor iraționale, bazată pe noțiunea de serie convergentă. Această întrebare a fost urmată de altele care vor întregi conținutul noțiunii de număr, prin trecerea de la noțiunea de număr irațional la aceea de număr real.

Problema de a se lămuri temeinic noțiunea de număr s-a pus către sfîrșitul secolului al XIX-lea și ea continuă să rămînă obiect de cercetare pînă în prezent. Ca să o pătrundem este necesar să răsfoim din nou, dar cu „alți ochi", capitolele



Primele 4 000 zecimale ale lui π

precedente şi aceasta o vom face în paginile ce urmează. Astfel, vom înlătura misterul ce mai plana încă, la începutul veacului al XIX-lea, asupra numerelor π şi „e", el rămînînd să-l învăluie încă pe „C".

SECRETUL NUMERELOR FAVORITE

Maeștri sînt aceia care ne arată ce este posibil din domeniul imposibilului.

PAUL VALÈRY

Pînă aproape de începutul secolului nostru, toți matematicienii care au îndrăgit numerele, considerînd probabil noțiunea de număr ca „înnăscută", au cercetat și au stabilit numai proprietățile lor, fără să se întrebe mai serios „ce este un număr?" Treptat, ei au admis că numerele se împart în numere naturale, în numere fracționare sau raționale și în numere iraționale. Apoi au introdus noțiunea de mulțime a numerelor întregi, prin adăugarea la numerele naturale a lui zero și a numerelor negative. Mai tîrziu au considerat mulțimea numerelor reale și pe aceea a numerelor complexe. Totuși, aceste treptate lărgiri ale conceptului de număr nu a izbutit să tulbure într-atîta curiozitatea științifică a vreunuia dintre cercetătorii secolelor trecute, încît să se oprească în loc ca să cerceteze cu meticulozitate noțiunea de *număr în sine.*

Discuțiile au început însă din anul 1900, prin articolul publicat de David Hilbert (1862—1943) : *Uber die Zahlbegriff* (Despre noțiunea de număr) și se mai continuă în parte și acum, dînd la iveală toate aspectele acestei încîlcite probleme, aspecte care, prin specificul lor, în cea mai mare parte, nu pot fi arătate aici. De aceea noi ne vom mărgini să urmărim, în desfășurarea lor istorică, numai principalele etape care au condus la aprofundarea noțiunii de număr.

Ne amintim că geometrii greci nu au studiat decît unele tipuri de mărimi incomensurabile. Mai întîi avem de observat că, deşi ei au creat o teorie a rapoartelor dintre segmentele comensurabile sau incomensurabile între ele, nu au înţeles că fiecare dintre aceste rapoarte reprezintă cîte un număr (raportul dintre un segment şi altul luat ca unitate de mărime). Să nu uităm că în Europa Occidentală, concepţia de număr iraţional a venit din Orient. Grecii nu au conceput numerele iraţionale, ci numai mărimile incomensurabile sau iraţionale. Printre aceste mărimi incomensurabile, ei au deosebit pe acelea care corespundeau la rădăcinile unei ecuaţii de gradul al doilea (sau şi bi ori tripătrate) cu coeficienţi raţionali şi apoi acelea ce au apărut în problema duplicării cubului, a trisecţiei unghiului şi a cvadraturii cercului. Toate mărimile incomensurabile provenite din extragerea rădăcinilor pătrate au fost prezentate de Euclid, în cartea a X-a a *Elementelor*, şi se referă la segmentele de dreaptă ce pot fi construite cu rigla şi compasul. Arhimede cunoştea şi metode numerice de calculare ale zecimalelor rădăcinei pătrate a unui număr natural, care nu era pătrat perfect. Mai tîrziu, astronomul Hiparh (sec. II î. e. n.) a introdus metoda de exprimare a rădăcinilor pătrate prin fracţiile sexazecimale acestea fiind folosite cu predilecţie de astronomii babilonieni. Procedeul s-a răspîndit în toată Europa medievală. Calcularea rădăcinilor pătrate prin fracţii zecimale a început prin secolul al XVI-lea (80), fracţiile zecimale devenind mai familiare abia din 1693, cînd Wallis a arătat că orice număr fracţionar se poate reprezenta într-un singur fel, fie printr-o fracţie zecimală limitată, fie printr-o fracţie zecimală infinită periodică.

O definiţie a numerelor se află în *Mathematicae lectiones* de Isac Barrow, publicată în 1669. În legătură cu aceasta, N. Burbaki scrie despre Barrow: „Definind numerele ca pe niște simboluri, care arată raportul dintre mărimi şi care sînt susceptibile să se combine între ele prin operaţii aritmetice, el a obţinut corpul numerelor într-o formă reluată apoi de Newton în *Arithmetica* sa, formă la care nici unul

dintre succesorii lui pînă la Dedekind și Cantor nu au avut nimic de schimbat" (81).

Folosirea fracțiilor continue pentru reprezentarea radicalilor sau ale altor numere irațională se întîlnește mai des abia după ce — între 1740 și 1765 — Euler a demonstrat că rădăcinile pătrate se pot exprima prin fracții continue regulate și periodice și invers, că orice fracție continuă regulată și periodică este convergentă și reprezintă un număr real, care este rădăcina unei ecuații de gradul al doilea cu coeficienți întregi.

Dar Euler și contemporanii lui nu bănuiau că ar mai putea exista și altfel de numere irațională, în afara celor formate prin radicali, deoarece ei erau convinși că orice ecuație algebrică, de orice grad n întreg, se poate rezolva prin radicali! De abia în 1822 cînd Niels Abel a dovedit că ecuațiile algebrice de gradul cinci (sau mai mari) nu se mai pot rezolva prin radicali (82), s-a putut trage concluzia că, numerele irațională nu sînt toate de aceeași natură.

Din lucrările lui Evariste Galois (1811—1832), C. C. Jacobi (1804—1851), Charles Hermite (1822—1901), J. R. Dedekind și mulți alții, a rezultat că, alături de infinitatea de numere irațională care se exprimă printr-un număr finit de radicali, există o altă infinitate de numere irațională care nu se mai exprimă prin radicali. Acestea reprezintă rădăcini reale ale tuturor polinoamelor de formă:

$$(1) \qquad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_{n-1}\,x + a_n = 0 \quad (n \geqslant 5)$$

în care coeficienții a_0, $a_1 \dots a_n$ sînt numere întregi oarecare. Dacă aceste rădăcini x_1, $x_2 \dots x_n$ nu mai verifică nici o altă ecuație de forma (1), dar de un grad mai mic decît n, atunci ele se numesc *numere algebrice de gradul n*.

În lumina acestei noi descoperiri, era natural să se bănuiască și existența altor numere irațională, *de natură transcendentă* (83) și, în adevăr, ele au fost găsite de Joseph Liouville (1809—1882). În 1844 el a stabilit că există clase foarte largi de numere, ale căror valori nu sînt nici raționale și nici nu se pot reduce la irațională algebrice. Așadar, a demonstrat că există numere care nu verifică o ecuație algebrică de

forma (1) cu coeficienți întregi și a arătat prin ce metodă se poate determina o întreagă categorie de asemenea numere, pe care le-a numit *transcendente* (84).

În 1851, Liouville a reluat problema, dînd alte exemple noi de clase de numere transcendente. Mai mult chiar, el a generalizat rezultatele obținute în cazul numerelor reale la cazul celor imaginare. Deși teorema lui Liouville nu a dat răspuns la întrebarea: „ce este numărul?", ea a aruncat o lumină așa de puternică asupra numărului însuși, încît, teoretic cel puțin, s-au putut stabili într-o ordine perfectă toate aspectele sub care se înfățișează un număr:

1. Numere naturale: 1, 2, 3,... care se mai numesc și întregi *raționali pozitivi*. Ele sînt rădăcinile unei ecuații de gradul întîi de forma $x - n = 0$, unde $n = 1, 2, 3...$ sînt întregi raționali pozitivi, iar coeficientul lui x este unu.

2. O generalizare imediată o formează totalitatea *numerelor algebrice întregi de gradul n*. Aceste numere sînt rădăcinile unei ecuații algebrice de gradul n:

$$(2)\quad x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

în care coeficienții $a_1 \ldots a_n$ sînt întregi raționali pozitivi sau negativi, coeficientul termenului care reprezintă necunoscuta la gradul cel mai mare fiind unu și, în plus, aceste rădăcini nu sînt rădăcinile unei alte ecuații similare de grad inferior lui n.

De observat că în definiția aceasta sînt cuprinse atît numerele întregi raționale pozitive, cît și cele întregi raționale negative. De exemplu -3 este un întreg algebric de gradul unu sau un întreg rațional negativ, fiind rădăcina ecuației $x + 3 = 0$, pe cînd $x = (-1 + i)$ este un întreg algebric de gradul doi, fiindcă el este rădăcina ecuației de gradul al doilea cu coeficienți întregi raționali $x^2 + 2x + 2 = 0$ și, în același timp, $x = (-1 + i)$ nu mai este rădăcina nici unei ecuații de gradul întîi de acest fel (85).

3. O altă generalizare se obține suprimînd, din definiția de mai sus, condiția ca primul termen să aibă coeficientul 1 și admițînd că el poate fi orice întreg rațional diferit de

zero. Acest caz e reprezentat prin ecuația (1) și rădăcinile acestei ecuații se numesc *numere algebrice de gradul n*. De pildă, $x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$ este un număr algebric de gradul doi, fiind rădăcina ecuației $2x^2 - x - 2 = 0$.

Cu numerele algebrice de gradul n se pot executa toate cele patru operații aritmetice (adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea, în afară de împărțirea cu zero). S-a demonstrat că efectuînd cu aceste numere oricîte operații aritmetice în număr finit, numerele noi astfel obținute rămîn *numere algebrice al căror grad nu-l depășește pe n*. Totalitatea acestor numere formează *corpul numerelor algebrice de gradul n*. În el sînt cuprinse toate numerele întregi, fracționare, iraționale, exprimate prin radicali, numerele complexe de forma $(a + bi)$ cu a și b întregi raționali iar $i = \sqrt{-1}$, precum și toate rădăcinile ecuațiilor de forma :

$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0$$

unde coeficienții b_0, $b_1 \ldots b_n$ nu mai sînt *întregi algebrici*, ci numere algebrice de gradul n $(n = 1, 2 \ldots n)$.

4. Multe, foarte multe numere au putut fi grupate în acest mod dar nu toate, fiindcă au rămas deoparte rădăcinile ecuațiilor algebrice în care coeficienții nu mai sînt numere algebrice. De exemplu, în ecuația $x - \cos 14° = 0$ termenul liber „cos 14°“ nu-i un număr întreg rațional și deci rădăcina acestei ecuații algebrice de gradul întîi : $x = \cos 14°$ este *un număr transcendent*.

Mai sînt însă și multe alte numere, lăsate de o parte ca de pildă acelea definite prin unele serii convergente, ori prin fracții zecimale sau fracții continue infinite și neperiodice, sau prin puterile de forma a^b, unde „a“ este un număr algebric, diferit de zero și 1, iar „b“ un număr irațional pătratic (86), sau încă și numerele π, „e“, „C“.

Și dacă ar fi să ne întrebăm cît de multe sînt aceste numere transcendente, iată răspunsul : sînt cu mult mai multe decît toate numerele algebrice la un loc (87). A cunoaște acest fapt și în plus, a putea afirma, atunci cînd se dă o

ecuație, dacă rădăcinile ei sînt numere algebrice sau transcendente, înseamnă dezlegarea multor probleme. De pildă, lămurirea primelor două dintre cele trei probleme celebre ale antichității: *problema duplicării cubului* și aceea a *trisecției unghiului*. După cum am văzut, ambele probleme conduceau la cîte o *ecuație algebrică de gradul al treilea cu coeficienți raționali*. Acum putem afirma că rădăcinile acestor două ecuații sînt *numere algebrice de gradul trei*. De aici rezultă că soluția căutată de greci, adică construcția acestor rădăcini (segmente) cu linia și compasul este imposibilă, fiindcă asemenea construcții corespund numai la numerele algebrice de gradul doi, sau la o combinație în număr finit de ecuații algebrice cu coeficienți raționali de gradul unu și doi*. Iată cît de ușor se stabilește natura numărului, cînd se cunoaște ecuația a cărei rădăcină este! Dar cum să știi dacă un număr este algebric sau transcendent, cînd nu se cunoaște ecuația în care s-ar putea încadra? De pildă, atunci cînd numărul este, ca în cazul numerelor π, „e" sau „C" — exprimat printr-o proprietate, prin diverse expresii infinite și nu printr-o ecuație? În aceste împrejurări nu mai există un răspuns imediat. De aceea, cînd Charles Hermite a demonstrat în 1873 că numărul „e" nu poate fi rădăcina unei ecuații algebrice de forma

$$a_0 e^n + a_1 e^{n-1} + \dots a_{n-1} e + a_n = 0 \qquad (3)$$

cu coeficienți întregi raționali și deci, că numărul „e" este transcendent, matematicienii de pretutindeni au primit vestea cu entuziasm și o nemaipomenită admirație. Era și natural să fie așa, căci evenimentul depășea nivelul cunoștințelor anterioare și arunca o nouă punte spre cetatea numerelor. Nimeni nu se mai îndoia acum că pe această punte va trece și cel ce va lămuri misterul numerelor π sau „C".

---

* Ecuația de gradul unu se reprezintă grafic printr-o dreaptă, iar ecuația de gradul al doilea, printr-un cerc. Așadar: construcții cu rigla și compasul!

În așteptare sau poate ca un exercițiu premergător (88), se căutau noi demonstrații, mai simple, ale transcendenței numărului „e". Ele au fost găsite după vreo 20 de ani, printre alții de David Hilbert, Paul Gordan (1837—1912), Adolf Hurwitz (1859—1919) ș. a. Frumoasa demonstrație a transcendenței numărului „e" dată de Hilbert este în linii generale destul de simplă, ca să o putem urmări aici. Pornind de la o sugestie găsită chiar într-un articol al lui Hermite, D. Hilbert reduce ecuația (3) la o sumă formată dintr-un număr întreg și o fracție ireductibilă. Or, o asemenea sumă nu poate fi nulă, cum ar cere-o membru al doilea. Așadar, fiind imposibilă o relație de forma (3), numărul „e" este transcendent. Ingeniozitatea demonstrației constă în alegerea întregilor și a numerelor fracționare. Dar, asupra acestui punct, nu-i locul să ne oprim aici. Demonstrația transcendenței numărului π s-a făcut în 1882 de către Ferdinand Lindemann (1852—1939). El s-a bazat pe rezultatul obținut de Hermite și, în plus, pe formula stabilită de Euler $e^{i\pi} = -1$. Această formulă se mai poate scrie și sub forma $e^{i\pi} + e^0 = 0$, adică aparent ca o ecuație asemănătoare aceleia considerată de Hermite (căci $e^0 = 1$). În realitate însă, ecuația aceasta este mai generală și se deosebește de (3) prin faptul că unul dintre exponenții lui „e" *nu este un număr întreg*, ci un număr irațional. De aceea Lindemann a trebuit să stabilească mai întîi că o relație de forma (4) este imposibilă :

$$a_0 e^{b_n} + a_1 e^{b_{n-1}} + \dots a_{n-1} e^{b_1} + a_n = 0 \qquad (4)$$

dacă coeficienții a_0, $a_1 \dots a_n$ și exponenții b_1, $b_2 \dots b_n$ sînt numere iraționale algebrice. Apoi a aplicat teorema demonstrată de el la cazul particular al ecuației lui Euler: $e^{i\pi} + e^0 = 0$, ecuație în care unul dintre exponenți este număr algebric.

(Or, din faptul că relația există iar unul dintre exponenți este număr algebric urmează că celălalt exponent (π) *nu mai poate fi algebric* ci transcendent!

Stabilirea transcendenței numărului π a dat un răspuns definitiv și problemei cvadraturii cercului, acela că este

imposibil să se construiască, cu rigla și compasul, latura unui patrat de arie egală cu a unui cerc dat (89).

Numai despre natura numărului „C“ matematicienii nu au putut spune nimic, deși mulți s-au ocupat cu această problemă. De cîte ori s-a crezut că, dacă nu transcendența, cel puțin iraționalitatea lui ar fi fost stabilită, s-a găsit cîte un defect în demonstrația respectivă.

Într-o scrisoare, pe care Ch. Hermite a trimis-o în 1888 prietenului său Th. J. Stieltjes, descoperitorul transcendenței lui „e“, spunea: „Cu privire la constanta lui Euler, cred că vă pot asigura că nici un ochi omenesc nu a putut sonda pînă acum misterul iraționalității ei. Ar fi o mare și frumoasă descoperire, să se demonstreze că „C“ este incomensurabil, dar de unde ar putea veni o rază de lumină într-o problemă așa de tainică, așa de profundă?“

NOTE

1 — A. B. Chance: The Rhind Mathematical Papyrus, *Vol. I. 1927, vol. II, 1929. Papyrusul Rhind este un caiet cu probleme de matematici, aparținînd scribului Ahmosée ce a trăit prin 1660 î. e. n. Reprezintă o copie făcută după o culegere de probleme folosită într-o școală de scribi și compusă cu vreo două veacuri mai înainte. Acest papyrus a fost studiat de Chance, fotografiat (vol. II) și transcris alături cu traducerea în limba engleză (vol. I)*

2 — *Grecii au formal cuvîntul* geometrie *din alăturarea termenilor* geo — pămînt *și* metreo — a măsura, *cu înțeles de* măsurarea pămîntului. *Iată ce scrie fostul elev a lui Aristotel, Eudemos din Rhodos (sec. IV î. e. n.)*: „*Geometria a fost descoperită de egipteni și a apărut în cadrul măsurării pămîntului*". *Această măsurare era necesară, căci, din cauza inundațiilor anuale, Nilul înghițea în fiecare an ogoarele și ele trebuiau măsurate mereu, ca să se stabilească aria lor. De altfel, cele mai multe dintre problemele de geometrie ale egiptenilor se referă la măsurările de teren.*

3 — *Pitagoreicii au putut ajunge pe mai multe căi diferite la mărimile iraționale. Una dintre ele este însăși teorema care poartă numele lui Pitagora, prin care se determină lungimea z a ipotenuzei triunghiului dreptunghic, de catete* x *și* y,

adică ($x^2 + y^2 = z^2$). *Aceasta, pentru că pe lîngă triunghiurile dreptunghice cu laturile comensurabile (de pildă* $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$), *în marea lor majoritate ipotenuza nu este comensurabilă cu nici una dintre catete. De exemplu pentru* $x = 1$ *și* $y = 1$, *ipotenuza este diagonala patratului de latură* 1 *și egală cu* $\sqrt{2}$.

Grecii numeau logos *raportul dintre două numere naturale. Imposibilitatea de a exprima pe* $\sqrt{2}$ *printr-un asemenea raport i-a condus la formarea termenului* alogon. *De la acesta provine și cuvîntul* irațional *căci* ratio *este traducerea în latină a lui* logos, *cu sensul de* raport. *Pentru a arăta că o mărime este incomensurabilă, grecii mai foloseau și expresiile* asimmetron *(ce nu are măsură comună) sau și* arreton *(ce nu se exprimă prin numere naturale). Se menționează că Democrit (sec. IV î. e. n.) ar fi compus prima lucrare despre numerele iraționale, dar ea s-a pierdut. În schimb Platon (sec. IV î. e. n.) vorbește pe larg despre aceste numere. Mai întîi în* Menon *arată cum se construiește un patrat de două ori mai mare decît un altul dat, observînd că, geometric, construcția este posibilă, dar că soluția este imposibilă din punct de vedere aritmetic. Și alt dialog,* Legile, *cuprinde referințe despre aceste numere. De asemenea, Aristotel (sec. IV î. e. n.) a discutat problema incomensurabilității dintre diagonala patratului și latura sa în* Metafizică *și în* Logică.

Se pare că atît babilonienii cît și egiptenii au cunoscut numerele iraționale, în sensul că ei au înțeles că nu se poate construi un patrat cu latura și diagonala măsurate amîndouă în numere întregi. Aceasta însă nu știrbește cu nimic din meritul matematicienilor greci, ei fiind aceia care au dezvoltat și discutat problema din punct de vedere teoretic.

4 — Se știe că pitagoreicii au descoperit și au studiat proporția muzicală cea mai perfectă, *definită prin șirul numerelor:*

$$a, \frac{a+b}{2}, \frac{2ab}{a+b}, b.$$

Pitagora a folosit această proporție ca să stabilească gama dialonică care-i poartă numele. Pentru $a = 1$ *și* $b = 2$, *avem*

șirul de numere $1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 2$. *Așadar, din proporția muzicală dată, rezultă că între frecvențele dintre note se introduc rapoartele* $\frac{3}{2}$ *și* $\frac{4}{3}$. *Cu alte cuvinte, cînd o coardă dă un anumit sunet, considerat ca începutul unei octave, se obține quinta sa la* $\frac{2}{3}$ *din lungimea acestei coarde și cuarta la* $\frac{3}{4}$ *din lungimea coardei. Deci, pentru a avea* armonie, *intervalul unei octave cere o împărțire neegală, anume, după proporția arătată mai sus. Din contra, considerînd intervalele egale,* $\frac{x}{y}$, *se produce* disonanță. *Ea se exprimă prin proporția* $\frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{\frac{x}{y}}{2}$. *De aici rezultă* $\frac{x^2}{y^2} = 2$ *sau* $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$.

5 — *Se spune că un segment de dreaptă* AB = a *este tăiat în* secțiunea de aur, *cînd el se împarte în medie și extremă rație. Numind* b *și* c *cele două segmente* (a = b + c), *avem :*

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \varphi \text{ sau } \frac{b+c}{b} = 1 + \frac{c}{b} = \frac{b}{c} = \varphi.$$

Așadar, φ *verifică ecuația* $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$, de *unde :*

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \text{ și } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Introdus de Euclid fără a-i da vreun nume special, acest număr φ *a fost regăsit de Fibonacci (sec. XIII), care l-a numit* numărul de aur. *El a fost reconsiderat de Le Corbussier în probleme de arhitectură sub denumirea de* modulor. *Construcția laturii pentagonului regulat se face prin împărțirea razei cercului circumscris lui în secțiunea de aur ; de asemenea și*

construcția poliedrelor regulate cu 12 fețe (dodecaedru) sau cu 20 de fețe (icosaedru). Ambele probleme au fost cunoscute și studiate în școala lui Pitagora.

6 — *Cartea a V-a a* Elementelor *lui Euclid conține o expunere sistematică a principalelor propoziții ale lui Eudoxus. După teorema a XXII-a din această carte: „dacă* $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ *și dacă* $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$, *rezultă* $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$, *adică raportul* $\frac{a}{c}$ este compus *din rapoartele* $\frac{a}{b}$ *și* $\frac{b}{c}$ *la fel și* $\frac{d}{f} = \frac{d}{b} \cdot \frac{b}{f}$.

Această proprietate, în care vedem azi produsul efectuat dintre două fracții, însemna atunci un raport compus. *Folosind noțiunea raportului compus pentru factori raționali și neraționali, matematicienii greci au putut calcula în mod intuitiv produsul a doi sau mai mulți factori. Mărimile fiind reprezentate geometric, operațiile asupra acestor cantități au condus la o algebră geometrică, anterioară algebrei propriu-zise. În particular, produsul a doi factori era privit ca aria unui dreptunghi, având ca laturi segmente de lungimea indicată de cei doi factori. Despre operația numită „aplicarea ariilor" se găsesc multe articole în literatura matematică a timpului și, bineînțeles, în* Elementele *lui Euclid.*

7 — *Acest citat al lui Proclus se referă la metoda geometrică folosită de greci ca să rezolve ecuațiile de gradul întîi și al doilea. Anume, la rezolvarea:*
— ecuației 1): $ax = b^2$ *se făcea aplicarea ariei segmentului dat* prin echivalență = paraboli;
— ecuației 2): $ax - x^2 = b^2$ *se făcea aplicarea eliptică a ariei, adică* prin lipsă = eleipsis;
— ecuației 3): $ax + x^2 = b^2$ *se făcea aplicarea hiperbolică a ariei, adică* prin exces = hiperboli.

Iată, de pildă, cum se stabilea lungimea segmentului x *în cazul ecuației* 1): $ax = b^2$, *unde* a *este segment dat și* b *aria unui patrat. Trebuia construit un dreptunghi cu latura* a *și*

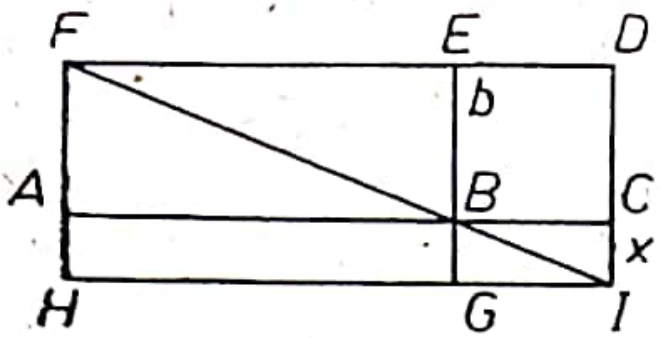


Fig. 17

aria b^2. *Se ducea segmentul* AB = a *și în prelungirea lui se construia patratul* BCDE *de latură* b *(fig. 17). Paralelele din* E *și* A *determinau dreptunghiul* ABEF. *Se ducea diagonala FB care întîlnea prelungirea lui* DC *în* I. CI *era segmentul căutat* = x. *Într-adevăr, formînd dreptunghiurile* FDIH *și* CBGI *se stabilește imediat echivalența dreptunghiului* ABHG *cu a patratului* EDBC, *din compararea triunghiurilor egale* FDI *și* FHI.

8 — *Imposibilitatea trisecției unghiului cu rigla și compasul s-a putut demonstra abia după ce Leonardo Fibonacci (sec. XIII) a stabilit că, în cazul general, o ecuație cubică cu coeficienți întregi nu poate avea ca rădăcini numai numere raționale și irationale patratice.*

9 — *Notînd cu* a *segmentul* $AD = AB$ *(fig. 10), cu* (x, y) *coordonatele punctului* T *și cu* θ *unghiul* DAT, *avem prin definiție :*

$$y = x \operatorname{tg} \theta \text{ sau } y = x \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \text{ și } \frac{x}{a} = \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\frac{\pi}{2}}.$$

De aici se deduce ecuația cvadratricei :

$$y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}.$$

Ca să se obțină trisecția sau, în general, împărțirea unghiului DAE *într-un raport* k, *este de ajuns să se împartă* AG *în raportul considerat, căci numind* AH *o altă poziție a razei* AB, *avem, la fel ca și pentru* AE :

$$1)\quad \frac{\sphericalangle DAE}{\sphericalangle DAB} = \frac{AG}{AB}; \qquad 2)\quad \frac{\sphericalangle DAH}{\sphericalangle DAB} = \frac{AI}{AB}$$

împărțind (1) *și* (2), *se obține* : $\frac{\sphericalangle DAE}{\sphericalangle DAH} = \frac{AG}{AI}$ *sau*

$\frac{\sphericalangle HAE}{\sphericalangle DAH} = \frac{IG}{AI}$ *și de aici urmează* :

$$\frac{\sphericalangle DAE}{\sphericalangle DAB} = \frac{AT \sin \theta}{AB} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}$$

Trecînd la limită, adică făcîndu-l pe θ *să tindă spre zero* :

$$\pi = \lim_{\theta \to 0} \frac{2\ AB}{AT\ \frac{\sin \theta}{\theta}} = \frac{2\ AB}{AT}$$

S-a stabilit astfel valoarea lui π, *cu alte cuvinte s-a rezolvat problema cvadraturii cercului. Este numai o soluție teoretică, căci în mod practic nu se poate determina această abscisă a punctului F de intersecție a curbei cu axa AD, deoarece cînd AB se confundă cu AD punctul F nu-i definit.*

Ca să se stabilească trecerea la limită și deci existența punctului F, Pappus a folosit metoda de demonstrație prin exhaustiune, inventată de Eudoxiu.

10 — *Am văzut că Menechmus a descoperit secțiunile conice, folosite pentru rezolvarea duplicării cubului. Dinostrate, fratele lui, a folosit curba lui Hippias, pe care a numit-o cvadratrice, ca să stabilească lungimea cercului. Pentru aceasta el a arătat, folosind metoda reducerii la absurd, că raportul dintre AF și AD este egal cu raportul dintre AD și sfertul de cerc BD. Odată această lungime cunoscută, cvadratura urma ușor, deoarece aria cercului se considera egală cu a unui dreptunghi avînd ca dimensiuni raza cercului și lungimea semicercului. Iată deci stabilită, pe cale geometrică, o metodă de a determina*

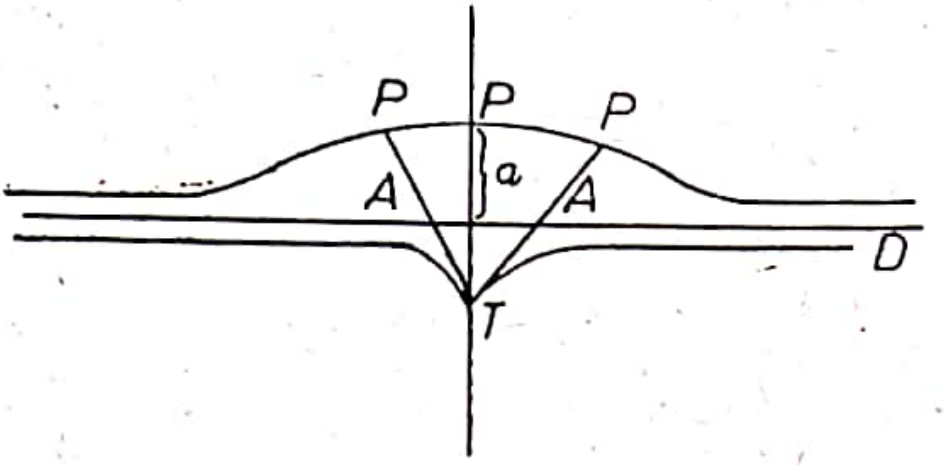
valoarea lui π. *Aşadar, s-ar putea afirma că problema cvadraturii cercului a fost rezolvată. Şi e adevărat că ea a fost rezolvată, însă nu aşa cum doreau grecii, adică nu a fost* astfel *rezolvată* cu rigla şi compasul! *Soluţia obţinută era numai* o soluţie teoretică *şi* nu practică. *În mod practic, problema a rămas* mai departe nerezolvată, *căci nu s-a putut găsi un segment,* desenat numai cu rigla şi compasul, *care să răspundă problemei, mai întîi pentru că nici cvadratricea nu poate fi construită cu rigla şi compasul ci numai prin puncte sau cu un all instrument mecanic şi apoi, pentru că nu se poate găsi practic poziţia punctului F de intersecţie dintre cvadratrice şi axă.*

11 — *Se înţelege că* P_n *este extremitatea spirei a* n — *a. Trebuie însă să se observe că — deşi aceste egalităţi sînt riguros stabilite — nici una dintre lungimile subtangentelor menţionate nu se pot determina cu rigla şi compasul, pentru că spirala nu poate fi construită cu rigla şi compasul, ci numai prin puncte sau în mod mecanic.*

12 — *După cum a observat H. G. Zeuthen în* Histoire des math. dans l'antiquité, *Paris 1902,* p. *149, Arhimede a ajuns la acest rezultat printr-un procedeu de „integrare veritabilă", înscriind în spirală o figură în formă de trepte, mărginită de arce de cerc şi de razele vectoare. De asemenea, circumscriind o figură analoagă şi apoi aplicînd metoda exhausliunei (vezi nota 16), Arhimede a stabilit foarte multe dintre proprietăţile acestei spirale. El a folosit-o ca să rezolve şi problema trisecţiei unghiului. Raportată la polul 0 şi la axa 0x (fig. 11) ecuaţia spiralei, despre care Arhimede scria că a fost descoperită de prietenul său Conon din Samos, este* $r = a\theta$. *Aşadar, ca să poată fi folosită la diviziunea unghiului, este de ajuns să se împartă raza în raportul dat.*

13 — *Nicomede (sec. II î.e.n.) a descoperit concoida, numită de Pappus cochloidă, adică asemănătoare cu o scoică, rezolvînd cu ajutorul ei atît problema duplicării cubului, cît şi aceea a trisecţiei unghiului. El şi-a construit curba cu un aparat special, inventat de el.*

Fig. 18



Concoida este locul geometric generat de punctul P, obținut astfel: dintr-un punct fix T (fig. 18) se duce o dreaptă care taie în A o altă dreaptă fixă (D). Pornind din A, se ia pe TA o lungime constantă „a" = AP, iar atunci cînd poziția lui A variază pe dreapta dată, punctul P descrie concoida. Avem deci TP = TA + a și după cum are loc una dintre relațiile a > TA, a = TA sau a < TA se obțin trei tipuri diferite ale curbei. În coordonate polare ecuația sa este:

$$r = TA \quad \sec 0 \pm a.$$

Pappus notează faptul că Nicomede a arătat că dreapta D este asimptotă și a adăugat: „Nicomede a rezolvat problema celor două medii proporționale prin linia concoidă cu ajutorul căreia a efectuat de asemenea și trisecția unghiului".

În coordonate carteziene ecuația ei este

$$(x - b)^2 \cdot (x^2 + y^2) - b^2 \; x^2 = 0 \quad unde \quad b = AT.$$

14 — *În* Histoire des math. dans l'antiquité, H. G. Zeuthen *observă că: „Valoarea esențială a unei construcții geometrice constă în aceea că ea demonstrează existența reală a acesteia". Iar mai departe, se explică această proporție printr-un exemplu: „După ce s-a dovedit că nu există nici un număr și nici un raport numeric (fracție) care înmulțit cu el însuși să dea $\sqrt{2}$, dacă, în loc de a se căuta un atare* număr *se caută* un segment *care să fie latura patratului dublu unui patrat construit pe un segment dat, atunci trebuie demonstrată mai întîi existența unui asemenea segment. Ori, tocmai aceasta se face cînd el*

se reprezintă prin diagonala patratului construit pe segmentul dat".

15 — *Pentru hexagonul înscris într-un cerc de rază r, avem : lat. hex. înscris = r.*

$$lat.\ hex.\ circumscris = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

$$de\ unde:\ 6r < 2\pi r < 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\, r,$$

16 — *Numele de „demonstrație prin exhaustie sau prin epuizare" a fost dat în secolul al XVIII-lea, dar meloda respectivă a fost creată de Eudoxus în secolul al V-lea î.e.n. Ea apare în prima teoremă din cartea a X-a a* Elementelor *lui Euclid : „Fiind date două mărimi inegale, dacă din cea mai mare se scade una mai mare decît jumătatea ei, iar din cea rămasă una mai mare decît jumătatea ei și aceasta se repetă continuu, va rămîne o mărime oarecare, care va fi mai mică decît cea mai mică mărime considerată". (*V. Marian, Elementele lui Euclid, *Buc. 1940, vol. II, p. 85).*

17 — *Într-o scrisoare pe care Arhimede a trimis-o prietenului său Dositeu, el face aluzie la meloda lui Eudoxus în felul următor : „Dacă două suprafețe sînt neegale și dacă mărimea cu care cea mai mare întrece pe cea mai mică se adaugă ei însăși de un număr de ori, se poate întîmpla ca restul adăugat lui însuși să întreacă suprafața dată și limitată. Geometri care au trăit înaintea noastră au folosit de asemenea această lemă ca să dovedească faptul că cercurile sînt între ele în raport dublu și sferele în raport triplu față de diametrul lor". Trebuie să adăugăm că, pentru Arhimede expresia „sînt între ele în raport dublu față de diametrul lor" avea înțelesul de „sînt proporționale cu patratul diametrului lor", și tot așa, raportul triplu însemna cel al cubului diametrului.*

18 — Paul Tannery *în* Sur la mesure du cercle d'Archimede (vol. I,) *a reconstituit toate calculele implicate în lucrarea lui*

Arhimede, atît în ceea ce privește determinarea perimetrelor poligoanelor considerate, cît și în determinările numerice de extragere a rădăcinilor patrate, operații extrem de complicate din punct de vedere a tehnicii de atunci, cînd numerele nu se scriau în sistemul pozițional și nici nu se stabiliseră reguli practice și simple de calcul așa cum există și sînt folosite de școlarii de azi.

19 — *În comentariul asupra* Măsurii cercului, *scrisă de către Eutokios (sec. VI e.n.), acesta a arătat că Sporos din Niceea a criticat cvadratura lui Arhimede, indicînd el însuși o metodă prin care se putea calcula mai exact raportul dintre cerc și diametrul lui, metodă pe care spunea că o deținea de la învățătorul lui, Philon din Gadara. Tot Eutokios a afirmat că Apolonius din Perga a determinat, în cartea* Okytokion *(Nașteri rapide), alte limite mai apropiate pentru numărul* π, *anume* $\pi = 3{,}1416 \ldots$ *Apolonius era contemporan cu Arhimede, dar mai tînăr decît el și îi cunoștea lucrările. Cartea amintită, azi pierdută, conținea procedee de calcul prescurtat printre care foarte probabil și această determinare mai precisă a numărului* π.

20 — *Rezultatul stabilit de Arhimede era fundamental prin aplicațiile lui în geodezie și astronomie. În astronomie mai ales, fără o valoare cît mai precisă a numărului* π, *nu se putea stabili cu precizie poziția astrelor pe bolta cerească. Calculele respective se executau cu ajutorul unor table de coarde — tabele corespunzătoare azi celor de sinusuri (căci sinusul unui arc este jumătate din coarda care subîntinde arcul dublu). Ținînd seamă de faptul că Arhimede a calculat lungimile laturilor poligoanelor regulate cu n laturi înscrise și circumscrise cercului, de la* $n = 3$ *pînă la* $n = 96$, *înseamnă de fapt că el a efectuat o bună parte din lucrările necesare pentru întocmirea unor asemenea tabele de coarde.*

Prima tabelă de coarde cunoscută, despre care se menționează în istoria matematicilor, este aceea calculată de astronomul Hiparch (sec. III î. e. n); azi ea nu mai există. Se păstrează numai tabelele de coarde calculate de către Claudiu

Ptolemeu (sec. II), în cartea sa Sintaxa matematică *sau* Almagesta. *Numărului* π *i se atribuia aici valoare 3,1416.*

21 — *Strîns legate de aceste cercetări ale lui Arhimede sînt și problemele relative la calculul volumelor limitate de diferite suprafețe curbe, ca de pildă paraboloidul și hiperboloidul de rotație, pana cilindrică și mai cu seamă determinarea volumului sferei. Calcularea acestor volume rămîne unul dintre titlurile de glorie ale lui Arhimede, fiindcă ele aparțin domeniului calculului infinitezimal, care se consideră o descoperire a timpurilor moderne și se datorește lui Newton și Leibniz.*

22 — *După cum se știe foarte bine, în domeniul aritmeticii, hindușii au avut marele privilegiu de a fi descoperit scrierea pozițională a numerelor. Astfel, ei au putut să exprime orice număr întreg, oricît de mare, numai cu ajutorul a 10 semne, pe cînd grecii, care notau numerele cu litere în loc de cifre, nu puteau scrie cu 27 de semne decît numerele pînă la 1000. Notarea numerelor e însă cel mai mic dintre avantajele pe care le oferă scrierea pozițională, mai sînt și altele care nu pot fi discutate aici.*

Hindușii au depășit pe greci și prin introducerea mărimilor negative. Ei cunoșteau dublul semn al rădăcinii patrate și îl foloseau pentru a separa astfel rădăcinile unei ecuații de gradul al doilea.

23 — *Din secolul al V-lea, ei foloseau formulele:*

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a} \text{ și } \sqrt[3]{a^3+b} = a + \frac{b}{3a^2}$$

pentru a extrage rădăcina patrală și rădăcina cubică.

24 — *Aceste valori ale lui* k_n *sînt:*

$$K_{n_1} = \frac{(-1)^n}{4n}; \quad K_{n_2} = \frac{(-1)^n \cdot n}{4n^2+1}; \quad K_{n_3} = \frac{(-1)^n (n^2+1)}{n(4n^3+5)}.$$

25 — *Numele lui adevărat era Al Karadji, adică născut în orașul Karadji. Transformînd sunetul dji în k și suprimîndu-se vocala, care în limba arabă se reprezenta printr-un punct, s-a ajuns la numele actual de Al Karki.*

26 — *În tratatul său* Despre cvadratura cercului, *Ibn al Haitam (965—1039) a făcut diverse observații, ca de pildă aceasta: „Mulți savanți cred că este imposibil ca aria cercului să fie egală cu a unui patrat și își exprimă aceste păreri în scrierile lor sau în discuții". Mai departe, după ce a arătat influența exercitată de lucrarea lui Arhimede* Măsura cercului, *a adăugat: „Raportul între două mărimi este o proprietate esențială, unică pentru mărimile de aceeași natură, și el există chiar dacă oamenii nu sînt în stare să-l găsească".*

27 — *În tratatul său despre cerc, terminat în 1424, Al Kași își propunea să exprime lungimea unui cerc cu diametrul cît de 600 000 de ori diametrul Pămîntului, admițînd o eroare mai mică decît grosimea unui fir de păr. El a izbutit să facă această determinare folosind un procedeu de simplificare a calculelor prin care a îmbunătățit meloda lui Arhimede de calculare a perimetrelor poligoanelor regulate înscrise și circumscrise în cerc. Astfel, a obținut o formulă de recurență, care-i permitea să calculeze coardele c_n ($n = 1, 2, 3...$) corespunzătoare arcelor de rază $r = 60$, anume: $a_n = 180° - \frac{60°}{2^{n-1}}$, anume: $c_n = \sqrt{r \cdot (2r + c_{n-1})}$.*

Pentru $a = 20$ și $r = 1$ formula lui Al Kași se transformă în formula trigonometrică $\sin \frac{0 + \pi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sin 0}{2}}$, redescoperită abia în secolul al XVIII-lea de Lambert. Regulile de calcul și mai ales de verificare ale calculelor efectuate, au fost mai tîrziu expuse într-un capitol dintr-o altă lucrare a sa, intitulată Cheia aritmeticii, *terminată în 1427.*

28 — Metoda iterației *sau a* aproximațiilor succesive *a fost introdusă în Europa abia în secolul al XIX-lea. Contem-*

poranii lui Al Kaşi au numit-o introducerea cubului la împărţire. Această denumire se datora faptului că ea era aplicată la ecuaţiile cubice $x^3 - px + q = 0$ scrise sub forma:

$$(1) \qquad x = \frac{q + x^3}{p}$$

în care soluţia era pusă sub forma $x = a + b + c + d \ldots$; unde a, b, c... erau numere determinate iterativ (adică prin repetări sau aproximări succesive). De exemplu: ştiind că rădăcina ecuaţiei (1) este un număr foarte mic (numerele erau toate exprimate în fracţii sexagesimale), din expresia (1) dacă se neglija cubul, prima aproximare a rădăcinii $x_1 = a$ era uşor de calculat, fiind dată de citul coeficienţilor q şi p: $x_1 = \frac{q}{p} = a$.

Notînd cu b eroarea comisă şi introducînd din nou valoarea completată cu eroarea sa, adică (a + b) în partea dreaptă a ecuaţiei (1), iar în stînga punînd în loc de x valoarea aproximată a, se obţine prima corecţie a rădăcinii, adică $x_2 = a + b$. Prin repetarea procedeului se atingea aproximaţia dorită. Adică, se obţin în mod succesiv valorile x_1; x_2; x_3... etc., unde: $x_1 = a = \frac{q}{p}$; $x_2 = a + b = \frac{q + a^3}{p} = \frac{q + x_1^3}{p}$. Făcîndu-se calculul se află x_2, apoi se găseşte x_3 prin $x_3 = \frac{q + x_2^3}{p}$, etc.

Meritul metodei introdusă de Al Kaşi constă în aceea că pentru a afla rădăcina ecuaţiei erau necesare un mic număr de operaţii, şi anume ridicarea la cub a aproximaţiei precedente, urmată de o împărţire.

29 — De abia în a doua jumătate a secolului al XI-lea au început să fie popularizate fragmente din Elementele lui Euclid. Ele se găseau reproduse în următoarele cărţi:
1. Ars geometriae, atribuită lui Boethius, care cuprindea enunţuri ale teoremelor din primele patru cărţi ale Elementelor, cu numeroase omisiuni, dar avea în plus şi unele compilaţii după scrierile agrimensorilor romani.

2. Geometria lui Gerbert, *conținînd o expunere melodică a primelor noțiuni de geometrie și o culegere de probleme de agrimensură.*

Mai tîrziu, în cursul secolelor XII—XIV au apărut și următoarele lucrări de geometrie practică, tipărite în Franța și destinate mai ales inginerilor topografi:
3. Practica geometriae Hugonis, *între anii 1120 și 1150;*
4. Tractatus quadrantis *de Maître Robert Anglès, în secolul al XII-lea și:*
5. La practica geometriae *de Dominicus Chivasso, în anul 1346, tipărită la Paris.*

30 — *Se cunosc în prezent două copii după această lucrare prezentată de:* 1) — Dr. Winterberg: Der Traktat Francos von Luttich. *Abh. Gesh. Math. IV, p. 135*; 2) — Paul Tannery: Francon de Liège. *Mém. sci. V pg. 86, 255, 259.*

31 — *Ca să ne putem imagina cît de adîncă era prăpastia ce despărțea epoca de atunci de cea situată cu vreo 13 veacuri în urmă, pe vremea geometrilor din Grecia antică, e deajuns să amintim că în* Elementele *lui Euclid problema transformării unui dreptunghi într-un pătrat era rezolvată elegant, prin construirea mediei geometrice dintre două segmente date și de asemenea că, egiptenii se îndoiau (cu 3000 de ani mai înainte!) de posibilitatea calculării ariei cercului* în mod exact, *așa după cum o credea acum Francon! Cunoștințele geometrice ale lui Francon erau atît de reduse încît, în naivitatea lui, el a considerat* ca necunoscut *ceea ce* nu cunoștea el; *anume, cum s-ar putea transforma un dreptunghi dat într-un patrat de aceeași arie?*

Francon a folosit un cerc de 14 picioare, din necesitatea de a elimina numerele fracționare. Încredințat fiind că formula lui Arhimede era exactă și nu aproximativă, el rezolvase de fapt problema cvadraturii chiar din clipa în care admitea că aria cercului este egală cu produsul 11 × 14 picioare pătrate! Dar el nu-și putea da seama de aceste subtilități. Pentru el, a face cvadratura, *nu era același lucru cu a exprima o arie printr-un dreptunghi ori patrat! El nu sesiza că aria cercului*

nu se poate exprima printr-un dreptunghi, fiindcă cercul este mărginit de o linie curbă iar dreptunghiul de segmente de dreaptă.

Mai mult chiar, deși știa că lungimea laturii patratului de arie 154 se exprima printr-un număr irațional, aceasta nu-l descuraja. Aflase probabil ceva despre reprezentarea geometrică a segmentelor, ale căror lungimi erau date de rădăcinile patrate ale unor numere ce nu erau pătrate perfecte. Necunoscînd însă care era construcția geometrică respectivă, el a căutat mărimea segmentului prin aplicarea unei melode fizice, anume de cîntărire a poligoanelor construite din pergament.

32 — *În cele 6 cărți ale lui Francon se găsesc și alte lucruri interesante, de pildă prima tentativă de a interpreta corect termenul de* unghi exterior *unui triunghi. El presupunea că această numire trebuia să se aplice la un unghi în care una dintre laturi aparținea triunghiului, iar cealaltă era exterioară lui. El nu bănuia însă că această latură exterioară trebuia să fie chiar* în prelungirea *altei laturi a triunghiului. Se mai poate citi în lucrarea aceasta despre arzătoarea dorință a lui Francon de a cunoaște* Elementele *lui Euclid, ținute pe atunci în secret, de către arabii din Spania.*

33 — *Prin* unghi de contingență *se înțelege figura ATB, formată de arcul de cerc AT (fig. 19) și tangenta TB în punctul T de contact. În* Elementele *lui Euclid (III, 16) se dovedește că „acest unghi este mai mic decît orice unghi ascuțit". Asupra acestui punct, strîns legat de problema continuității în geometrie*

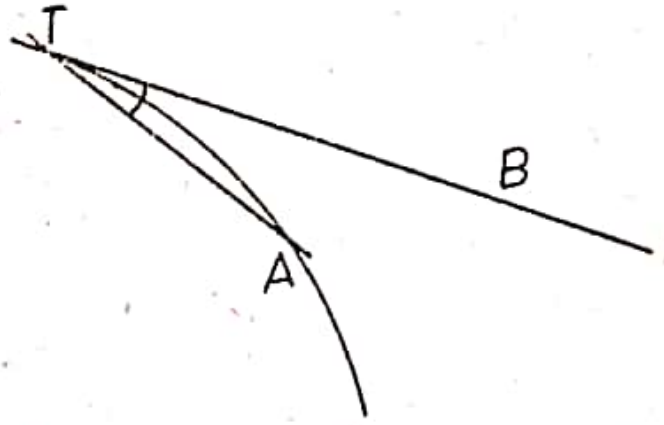


Fig. 19

au discutat aproape toți comentatorii Elementelor, *greci și arabi. Proclus îndeosebi, care a aprofundat noțiunea de unghi, a încercat să aplice consecințele rezultate din această teoremă la soluția cvadraturii cercului propusă de Bryson. Campanus de Novara a reluat ideile lui Proclus și le-a folosit ca să afirme și el posibilitatea cvadraturii cercului.*

34 — *Meritele lui Bradwardinus au depășit cu mult slăbiciunea sa pentru cvadratura cercului. El s-a ocupat de proprietățile izoperimetrice ale poligoanelor și apoi de iraționalitatea lui* $\sqrt{2}$. *În geometria sa teoretică se găsesc și primele tentative de notare a puterilor fracționare ca, de exemplu, notația* $a^{1/2}$ *în locul lui* $\sqrt{a}$. *Însă, în toată plenitudinea ei, această problemă a fost abordată de Nicole Oresme (1323—1383), care stabilește regulile de calcul ale puterilor cu exponenți fracționari, generalizînd pe acelea cunoscute în cazul puterilor cu exponenți întregi.*

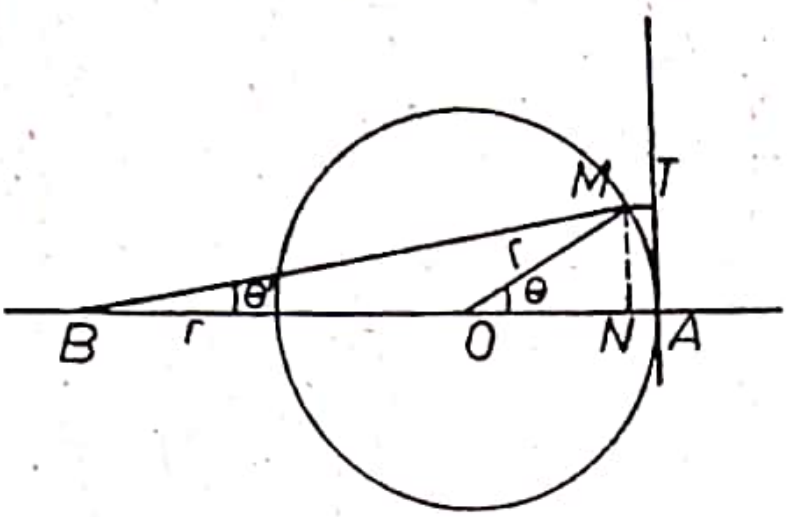
35 — *Lucrarea lui Albertus de Saxa conține un istoric documentat al cvadraturii cercului. El îl citează și pe Campanus printre cei ce au scris despre această problemă.*

36 — *Dacă se face abstracție de lucrările lui Fibonacci din Pisa, care nici nu erau cunoscute în universități, Dominicus Parisiensis pare să fie primul învățat din Occident care a reușit să unească învățămîntul teoretic cu cel practic. Chiar dacă exemplul lui n-a fost urmat, opera sa, răspîndită destul de repede, a exercitat o influență pozitivă asupra urmașilor.*

37 — *Iată metoda folosită de Nicolaus din Cusa: Fie cercul O și arcul* AM *(fig. 20). Se duce tangenta în A și pe diametru AO se ia lungimea AB = 3OA. Dacă din punctul* B *se duce secanta* BM *care taie tangenta în* T, *atunci segmentul* AT *este mai mic decît arcul* AM, *abstracție făcînd de o mărime foarte mică. Din această construcție, Cusanus a dedus formula indicată.*

38 — *Iată o construcție imaginată de Nicolaus din Cusa pentru determinarea valorii aproximative a lui* π : *Fie* ABC *un triunghi*

Fig. 20



echilateral. Se caută raza cercului a cărui lungime să fie egală (abstracție făcînd de un număr foarte mic) cu perimetrul triunghiului ABC. *Fie* O *centrul triunghiului* ABC *(fig. 21)* $OI = \rho$ *raza cercului înscris și* $OA = r$ *a celui circumscris. Fie* $AI = \frac{AB}{2}$ *și* $AT = TI$. *Așezînd pe* OT *segmentul* $TF = \frac{OT}{4}$ *se obține* OF *ca rază a cercului căutat. Dacă* $OA = r$ *avem :* $OI = \frac{r}{2}$, $TI = \frac{r\sqrt{3}}{4}$ *și deci* $OT = \frac{\sqrt{7}}{4} r$ *și* $OF = \frac{5}{4}$, $OT = \frac{5\sqrt{7}}{16} r$.

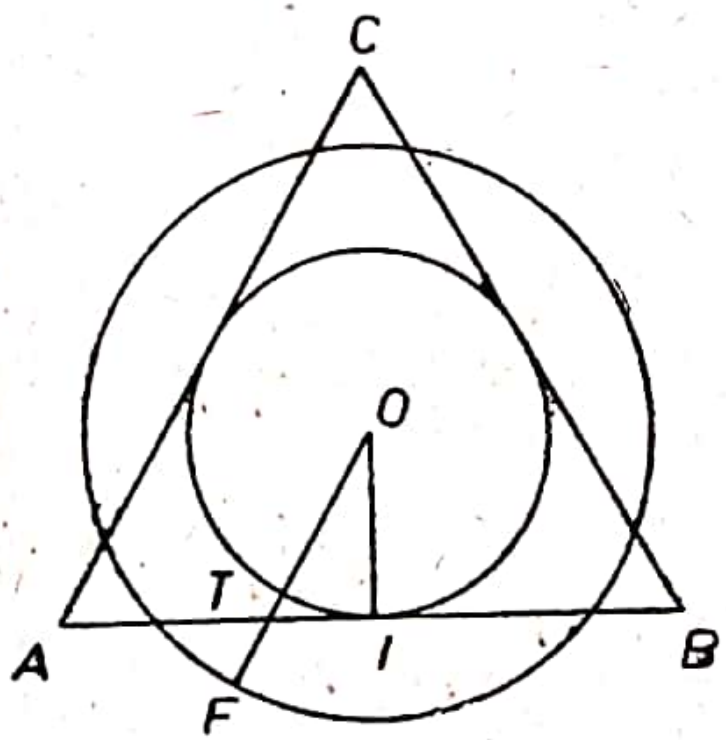


Fig. 21

Egalînd lungimea cercului cu perimetrul triunghiului ABC, *se obține valoarea numărului* $\pi : 3\sqrt{3}\,r = 2\pi\frac{5\sqrt{7}}{16}r$ *de unde*

$$\pi = \frac{72}{5\sqrt{21}} = 3{,}1423...$$

Valorile limită stabilite de Arhimede fiind 3,1408 și 3,1428 rezultă că cea dedusă de Cusanus este mai apropiată de valoarea reală a numărului π *decît limita superioară indicată de Arhimede.*

39 — *După moarte, această afirmație îndrăzneață a lui Nicolaus Cusanus a fost criticată de Regiomontanus (1436—1476), unul dintre matematicienii și astronomii cei mai de seamă ai timpului, în lucrarea :* De quadratura circuli contra Card. Cusanus.

40 — *Cartea reprezintă o culegere scrisă în limba italiană, avînd de model lucrările lui Fibonacci. Luca Pacioli îl citează adesea, adăogînd chiar că alunci cînd nu citează pe nimeni, tot lui Leonardo Fibonacci îi rămîne datorat. Lucrarea se împarte în două părți : 1) Aritmetica și Algebra ; 2) Geometria. În prima parte reproduce o parte din tratatul, azi pierdut, a lui Fibonacci* Despre numerele patrate. *În algebră, el studiază ecuațiile de gradul întîi și doi, cu rădăcini pozitive. Termenii tehnici sînt traduși după nomenclatura arabă. Astfel, „necunoscuta“ —* res *— este tradusă prin* cosa *(lucru), „patratul necunoscutei“ prin* census *și „rădăcina patrată“ prin* latus. *El menționează de asemenea ecuațiile cubice cunoscute de arabi, adăugînd că rezolvarea unor asemenea ecuații o consideră tot așa de imposibilă ca și cvadratura cercului! În geometrie Paciolli făcea mereu aplicații la algebră. Această metodă a fost în urmă adoptată de toți matematicienii din secolul al XVI-lea. În* Aperçu historique, *M. Chasles constata că : „Luca din Borgo, trecînd la algebră, o privea ca parlea din știința calculului, cea mai necesară aritmeticii și geometriei.“ Algebra era denumită, de Fibonacci* Arte maggiore *sau* Regula de la cosa *sau încă* Algebra *și* Almucabala. *Această operă a fost primul tratat*

de algebră imprimat. Şi tot Chasles observa: „Nu este nici o îndoială că cei doi mari geometri ai Italiei, Cardano şi Tartaglia, datorează Sumei, *scrisă de Luca din Borgo, pe care îl şi citează adesea, cunoştinţele lor matematice şi chiar metoda pe care au urmat-o".*

41 — *Ajutat de Leonardo da Vinci, care a şi făcut figurile din carte, Luca din Borgo a atras atenţia asupra numeroaselor aplicaţii ale* secţiunii de aur, *căci aşa a numit împărţirea unui segment în raportul extrem şi mediu. După cum am văzut, această problemă a fost bine cunoscută de greci. Luca Paciolli a reluat-o, arătînd că valoarea acestui raport se descoperea atît în proporţiile dintre diferitele părţi ale trupului omenesc, cît şi în cele mai frumoase monumente din arhitectură. Din această pricină el a considerat acest raport ca o* proporţie divină, *iar Leonardo da Vinci l-a numit* secţiunea de aur.

42 — *Iată una dintre construcţiile propuse de Charles de Bouvelle: Fie în cercul* O *(fig. 22) două diametre perpendiculare* AB *şi* CD. *Se duce tangenta* DT *în* D *la cerc şi se prelungeşte raza* OD *pînă în* E, *luînd* $DE = \frac{OD}{4}$. *Din punctul* E *ca centru, cu raza* EA, *se descrie arcul de cerc care taie tangenta în* F *şi* G. *Bouvelle credea că poate considera* FD *(sau* DG*) egal cu*

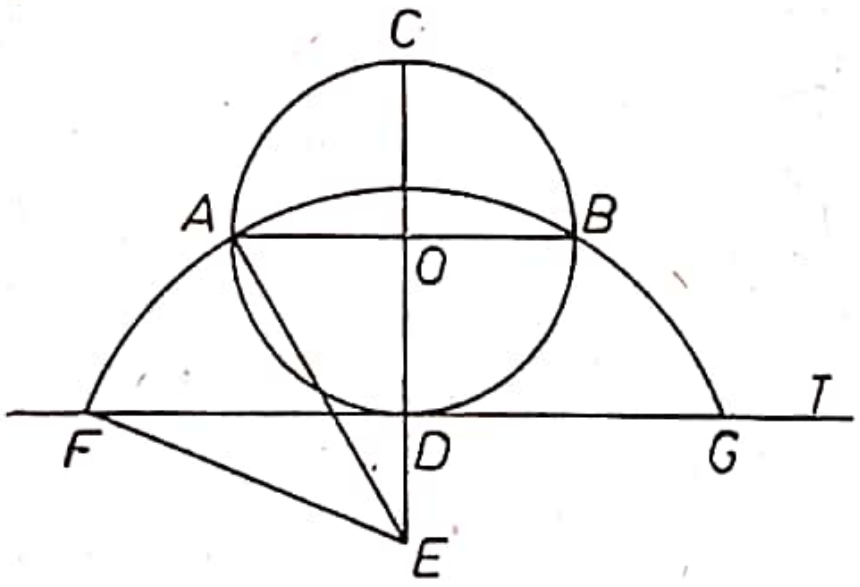


Fig. 22

o pătrime din lungimea cercului. Făcînd calculele, avem, dacă luăm OD = 1 :

$$OE = \frac{5}{4} \text{ deci } EA = \sqrt{1 + \frac{25}{16}} \text{ sau } EA = \sqrt{\frac{41}{16}} = EF \text{ și de}$$

$$\text{aici : } FD = \sqrt{EF^2 - ED^2} = \sqrt{\frac{41-1}{16}}$$

$$\text{Așadar: } FD = \frac{2\sqrt{10}}{4} = = \frac{\pi}{2} \text{ deci } \pi = \sqrt{10}!$$

43 — *Construcția propusă de Finaeus era următoarea : Fie* AB *și* CD *două diametre perpendiculare din cercul* O *(fig. 23). Se unește* C *cu mijlocul* E *al arcului* CB *și se împarte segmentul* CE *în medie și extremă rație,* EF *fiind cel mai mare dintre segmente. Prin* F *se duce paralela* FG *la* AB. *Ea taie* CD *în* I. OI *este semilatura pătratului echivalent cu cercul dat.*

44 — *P. Nuñez s-a născut în Portugalia și era bine cunoscut prin descoperirile lui legate de navigație și, în particular prin studiul ce l-a făcut în legătură cu liniile loxodromice.*

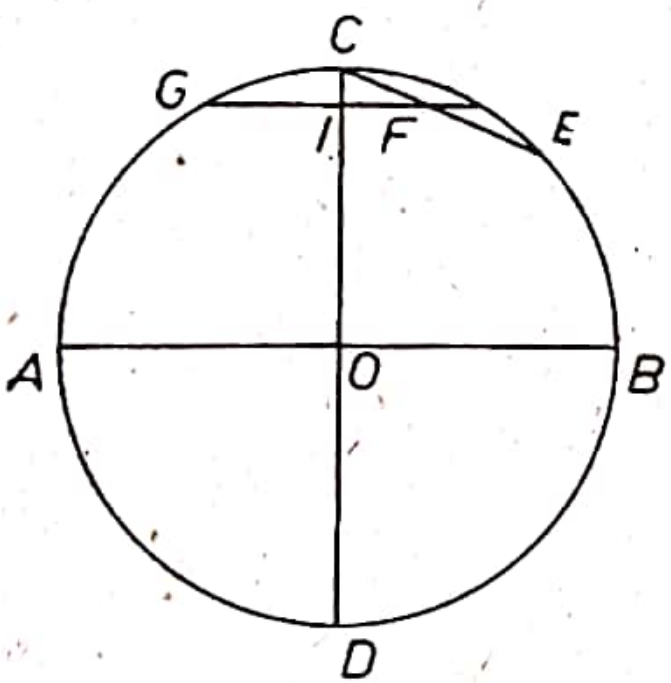


Fig. 23

45 — *Adriaen Anthoniszoon a ajuns la această valoare a numărului* π *propunîndu-şi să combată valoarea pretinsă exactă a lui Simon van der Eycke, pe care o stabilise în cartea sa* Quadrature du cercle ou manière de trouver un carré égal au cercle donné et au contraire *(Cvadratura cercului sau metoda de a găsi un pătrat egal cu un cerc dat şi invers), tipărită în 1584. Combaterea se arăta de data aceasta mai dificilă, întrucît din construcţia lui van der Eycke primele două zecimale erau exacte, iar eroarea apărea abia după aceea. Iată, de exemplu, una din construcţiile propuse de Eycke pentru a stabili cvadratura cu rigla şi compasul, din care rezultă* π *cu două zecimale exacte : Fiind dat semicercul* AB *şi tagenta* AT, *dacă se taie* AT *printr-o secantă* BCD *(fig.24), aşa ca* BC = AD, *atunci coarda* BC *va fi egală cu un sfert de cerc. Ducînd* CI $\perp$ *pe* AB *şi luînd* r=1, *avem :* $\frac{AD}{IC} = \frac{BD}{AD} = \frac{2}{BI}$ *de unde :*

(1) $\overline{AD}^2 = IC.BD$ *şi* $2\ IC = AD.BI$. *La fel* $\overline{IC}^2 = BI.IA$ *şi prin împărţire* (2) : $2.\ IA = AD.IC$. *Dar* AD = BC *şi* $BD = \sqrt{4 + \overline{AD}^2}$; *de asemenea :* $\frac{IA}{2} = \frac{CD}{BD} = \frac{BD - AD}{BD}$ *deci :*

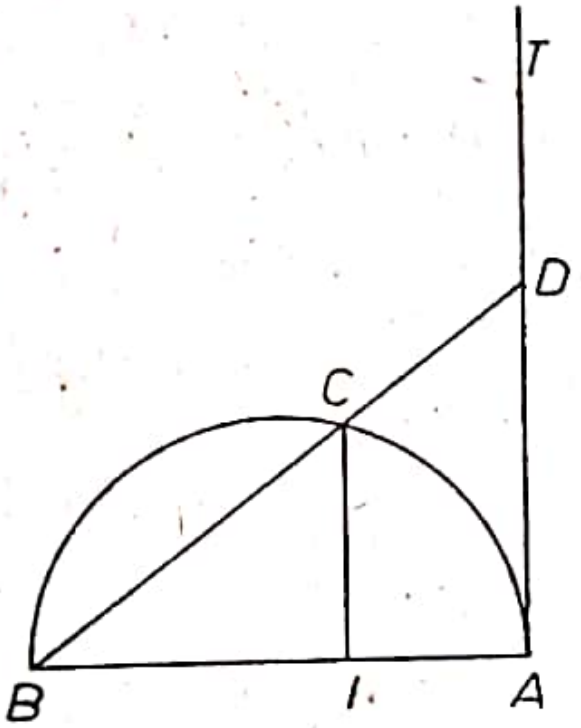


Fig. 24

$IA = 2\dfrac{\sqrt{4 + AD^2} - AD}{\sqrt{4 + AD^2}}$ *folosind (2) și înlocuind în* (1) *se află*: $AD = \sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$, *adică* $\pi = 2\sqrt{2(\sqrt{5}-1)} = 3{,}144...$ *Valoarea lui* π *calculată de Metius se găsește în lucrarea publicată de fiul său Adrian Adrienszoon (1571—1635)* Arithmeticae et geometriae practica, *apărută în 1611. Aceasta arăta că tatăl său a stabilit mai întîi că* π *este cuprins între* $\dfrac{377}{120}$ *și* $\dfrac{333}{106}$ *și apoi, luînd media aritmetică a numărătorilor și a numitorilor a dedus ca valoarea apropiată* $\pi = \dfrac{355}{113} =$ $= 3{,}1415929$. *Ne amintim că această valoare era cunoscută de chinezi încă din veacul al V-lea.*

46 — *Dintre matematicienii care au criticat cvadratura lui Scaliger, citățm pe Christoph Clavius (1537—1612), pe P. Antonio Cataldi (1548—1626), care, odată cu cvadratura lui Scaliger a combătut-o și pe aceea a lui Alfons Cane de Molina (publicată în 1598), și pe Adrien van Roomen sau Romanus (1561—1615) elev, al lui Clavius.*

47 — *Cele 20 de zecimale ale numărului* π *se găsesc în* Van der Circke, *carte publicată de Ludolph van Ceulen, în 1596, în limba olandeză și tradusă de W. Snellius, în 1615, în latinește. El le-a calculat considerînd poligoanele înscrise și circumscrise cercului cu* $15.2^{31} = 32\,512\,254\,720$ *de laturi. Apoi, ajutat de elevul său Peter Cornelius, a ajuns la poligoanele cu* $2^{61} = 4\,611\,686\,018\,427\,387\,904$ *laturi și, de aici a dedus cele 35 de zecimale publicate în 1615, după moartea lui. Cele 35 de zecimale calculate de el i-au fost gravate, după dorința lui, pe piatra de pe mormîntul ce se află în Leyda. Admirația matematicienilor din vremea lui pentru performanța dovedită în executarea calculelor prin care a stabilit un număr așa de însemnat de zecimale, s-a manifestat prin faptul că multă vreme după moartea lui, numărul* π *era numit și „numărul lui Ludolph".*

48 — *În cartea lui Snellius se află o tabelă a perimetrelor poligoanelor regulate înscrise și circumscrise cercului având* 10.2^n *laturi* ($n = 3, 4, \ldots 19$). *În felul acesta Snellius a reușit să compare rezultatele obținute de el cu acelea ale lui Ceulen, pe care le-a executat însă într-un timp mult mai scurt. Pentru primele 34 de zecimale el a folosit un poligon cu numai* 2^{30} *de laturi, în loc de cel cu* 2^{64} *de laturi cît cerea formula lui Arhimede de aproximare a limitelor, pe care o aplicase Ceulen. Folosind aceleași inegalități ale lui Snellius, Gruenbergerius a restabilit, în 1630, valoarea lui* π *cu 35 de zecimale exacte și a publicat-o în* Elementa Trigonometrica.

49 — *O variantă a metodei izoperimetrelor este aceea a* izoariilor *indicată de A. M. Legendre (1752—1833). În locul poligoanelor regulate cu același perimetru, Legendre a considerat poligoane regulate* de arii egale $= A$. *Cu notațiile folosite în cazul metodei izoperimetrelor, el a demonstrat formulele:*

$$a_{2n} = \sqrt{\frac{a_n (a_n + b_n)}{2}}; \quad b_{2n} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Prin ele, aproximarea numărului π *se face prin șirurile*

$$\pi a_{2n}^2 < A < \pi b^2_{2n} \text{ unde } (n = 4,8 \ldots 4.2^t).$$

50 — *François Viéte este primul care a arătat că raportul dintre aria cercului și aria patratului circumscris lui se exprimă prin produsul infinit:*

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

ținînd seama că $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, *expresia capătă forma trigonometrică dată de Euler.*

51 — *Iată pe ce cale a stabilit Wallis această formulă. El a considerat curbele exprimate prin ecuațiile:* $y = (1 - x^2)^n$ *și a stabilit aria* A_n *cuprinsă între curbă, axa absciselor și ordonatele* $x = 0$, $x = x$, *pentru diferite valori ale lui* n:

pentru : $n = 0$ *rezultă* $A_0 = x$ *de unde pentru* $x = 1$: $A_0 = 1$,

pentru : $n = 1$ -„- $A_1 = x - \frac{x^3}{3}$ -„- $A_1 = \frac{2}{3}$

pentru : $n = 2$ -„- $A_2 = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$ -„- $A_2 = \frac{8}{15}$

Introducînd arcul de cerc, definit de ecuaţia $y = (1 - x^2)^{1/2}$ *cu* $0 < x < 1$, *el a căutat aria limitată de curba* $y = (1 - x^2)^n$ *cînd* $n = \frac{1}{2}$ *pornind de la* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *Astfel a obţinut formula sa, punînd totodată la punct metoda interpolaţiei, metodă care are şi azi o deosebită importanţă în tehnica calculelor aproximative. Dificultăţile întîmpinate de Wallis ca să stabilească această formulă erau mari căci, în acea vreme, Newton nu stabilise încă nici calculul integral şi nici măcar formula binomului generalizată pentru exponenţi fracţionari.*

52 — *Iată cele două fracţii continue nelimitate, stabilite de Euler:*

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1 \cdot 3}{4 + \cfrac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 + \cfrac{5 \cdot 7}{4 + \ldots}}}} \quad ; \quad \frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{2}{7 + \cfrac{1 \cdot 3}{8 + \cfrac{3 \cdot 5}{8 + \cfrac{5 \cdot 7}{8 + \ldots}}}}$$

53 — *Menţiuni despre fracţiile continue nelimitate se găsesc încă în antichitate. Platon discută despre ele în unele dintre dialoguri, considerîndu-le indicate ca să exprime natura mărimilor iraţionale. De asemenea ele se întîlnesc în matematicile hinduse, la Aryabhata, sau în matematicile arabe, la Ommar Al Khaygam (1048—1123), fiind folosite de aceştia pentru aproximările necesare în astronomie. Arabii extrăgeau şi rădăcina patrată prin dezvoltarea în fracţie continuă, după formula*

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + b.}}$$

În Europa occidentală ele au apărut din Evul mediu, fiind introduse din 1202 de Leonardo Fibonacci în Liber abaci. Mai tîrziu se găsesc în Le triparty de la science des nombres (Ştiinţa despre numere în trei părţi), compusă în 1484 de Nicolas Chuquet, şi în Algebra lui Raffaello Bombelli (1530—1580) publicată în 1572. Aici apare şi primul exemplu numeric de extragere a rădăcinii :

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ldots}}$$

Chr. Clavius (1537—1612) a arătat în Geometria practica, din 1604, un procedeu de transformare a fracţiilor ordinare în fracţii continue şi tot pe atunci P. A. Cataldi (1548—1626) a stabilit teoria lor. Dar cel ce a pus în evidenţă importanţa aproximaţiilor numerice prin fracţiile continue nelimitate a fost J. Wallis. El s-a ocupat de ele în Arithmetica infinitorum, apărută în 1666 şi a dat ca exemplu fracţia continuă stabilită de W. Brouncker pentru numărul π. În 1737 Euler a perfecţionat notaţiile folosite pînă atunci în exprimarea lor, dîndu-le forma modernă, mai accesibilă în mulţiplele lor aplicaţii din domeniul analizei etc. Produsele infinite au fost introduse abia în 1593 de către Viéte şi apoi au fost folosite de Wallis. Tot Leonard Euler a fost acela care le-a studiat în mod sistematic, deschizîndu-le drum înspre aplicaţiile de mai tîrziu.

54 — Scipion del Ferro a încredinţat formula descoperită de el ginerelui său Antonio Fiore şi acesta l-a provocat pe Nicolas Tartaglia din Brescia (1500—1557) la un duel matematic. Astfel s-a dovedit că şi Tartaglia descoperise formula de rezolvare a ecuaţiei de gradul al treilea, chiar într-o formă mai generală decît aceea cunoscută de Fiore. Nici Tartaglia nu a dat în vileag descoperirea sa, ci s-a mărginit să spună că, pentru a o descoperi a folosit un anumit procedeu geometric. Mai tîrziu însă G. Cardan a găsit un şiretlic prin care l-a constrîns pe Tartaglia să-i destăinuiască formula şi a publicat-o, amintind în cartea sa pe ambii descoperitori.

55 — *Se pare că în legătură cu observarea numerelor complexe G. Cardan a avut un predecesor în persoana lui Nicolas Chuquet. Căci în* Triparty *acesta, considerînd ecuația* $4 + x^2 = 3x$, *arăta că rădăcinile ei :*

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4}$$ *sînt „imposibile“.*

56 — *Aplicînd formula lui Cardano la ecuația* $x^3 = 15x + 4$, *Bombelli a găsit ca rădăcină*

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4.$$

El a observat că această ecuație are toate rădăcinile reale, deși sînt exprimate printr-o formulă care nu se poate simplifica în așa fel ca să dispară părțile imaginare. El a demonstrat, prin construcții geometrice, că părțile imaginare ale formulei se distrug ca avînd semne contrare. Bombelli a întîlnit deci cazul ireductibil *al ecuației de gradul al treilea :*

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 < 0$$

acela, în care părțile formulei care reprezintă fiecare rădăcină, formează, prin asamblare, un rezultat real. Prin 1590, François Viéte, care nu a admis nici existența numerelor negative și nici pe ale celor imaginare, a stabilit că trisecția unghiului *conducea la* cazul ireductibil *al ecuației de gradul al treilea. Tot el a rezolvat și problema duplicării cubului cu ajutorul unei ecuații de gradul al treilea.*

Atragem atenția că în secolul al XVI-lea nu începuse încă procesul de formalizare, adică de notare a operațiilor matematice și chiar a mărimilor prin semne, ci totul se exprima prin cuvinte. Așadar, notațiile de mai sus nu sînt acelea originale întrebuințate de Bombelli. În loc de $\sqrt{-1}$ *el scria* cu cuvinte *„Piu di meno“, iar pentru* $-\sqrt{-1}$ *: „Meno di meno“. În felul acesta, folosind numai inițialele cuvintelor, în loc de* 2i, *în cartea lui se află expresia :* pdm. 2.

57 — *Această teoremă a fost formulată de Girard astfel: „Orice ecuație algebrică întreagă de gradul n trebuie să admită n rădăcini reale sau imaginare". Prin această afirmație el justifică existența rădăcinilor imaginare pe care el le numea „aparente".*

58 — *Intersecția liniilor curbe reprezenta una dintre metodele folosite de geometrii greci ca să determine astfel anumite puncte sau segmente, ca, de pildă, cele două medii proporționale din problema dublicării cubului. Privind problema mai general, matematicienii din secolele XVI și XVII au folosit liniile curbe ca să rezolve anumite ecuații de grad superior lui doi. În felul acesta ei au rezolvat ecuațiile de gradul trei sau patru prin intersecția unui cerc cu o parabolă.*

59 — *Deși Euler a folosit numerele imaginare sau complexe în cele mai multe dintre domeniile matematice cu care s-a ocupat, el le-a considerat ca pe niște* expresii formale, *neavînd nici o contingență cu domeniul numerelor reale. În cartea sa de algebră din 1770 scria: „Toate expresiile de forma* $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ *nu sînt nici nimic, nici mai mari și nici mai mici decît nimic, sînt imaginare și imposibile".*

60 — *La sfîrșitul acestei note, Français și-a dezvoltat și teoria lui proprie despre numerele complexe, adăogînd: „Fondul acestor idei noi a fost găsit într-o scrisoare a d-lui Legendre, care vorbea ca despre un lucru ce i-ar fi fost comunicat". După această notă Gergonne a descoperit că R. Argand era autorul broșurii* Încercări asupra unui mod de a reprezenta cantitățile imaginare prin construcții geometrice, *broșură ce fusese examinată de Legendre atunci cînd ea era în manuscris. Tot în volumul IV din* Anale *au mai apărut și alte articole de ale lui Argand, ale lui Français, precum și o notă transmisă de Lacroix, prin care se aduce la cunoștință că, în 1806, Buée publicase în* Philosophical Transactions *din Londra un memoriu cu același subiect ca și acelea scrise de Argand și Français.*

61 — *Neper și Bürgi au construit primele tabele de logaritmi, prin care operațiile de înmulțire și de împărțire se reduceau la adunare și scădere. De altfel, înlocuirea înmulțirii prin adunare și a împărțirii prin scădere fusese rezolvată din secolul al XVI-lea într-o formă mai puțin comodă de J. Werner (1468—1528). Acesta a stabilit o metodă bazală pe transformarea produsului dintre două sinusuri în sumă sau diferență. Metodă numită* prostafereticã *(de la cuvintele grecești :* prosthesis — *adăugare și* afciresis = *luare, scoatere) a fost perfecționată apoi de Rheticus (1514—1576) și Tycho-Brahe (1546—1601). La începutul secolului al XVII-lea, calculele trigonometrice, cerute atît de astronomie cît și de dezvoltarea navigației, își măriseră considerabil volumul și metoda prostafereticã devenise prea greoaie. John Neper a publicat în 1614 la Edinburg cartea intitulată* Mirifici logarithmorum canonis discriptio, *în care se aflau procedeele de folosire a logaritmilor calculați de el. Metoda folosită ca să-i calculeze a fost explicată într-o a doua carte, apărută postum, în 1619, cu titlul* Mirifici logarithmorum canonis constructio. *Aproape în același timp și, independent de Neper, Jobst Bürgi a calculat tabelele de logaritmi ale numerelor și le-a publicat la Praga în 1620. Dar, din cauza entuziasmului dezlănțuit de apariția logaritmilor lui Neper, acestea au trecut atunci aproape neobservate. De altfel, nici titlul* Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen *(Tabele de progresii aritmetice și geometrice) nu spunea prea mult pentru cei ce nu cunoșteau încă originea logaritmilor. Neper a dat logaritmilor săi epitetul de „minunați", căci deși aceștia au fost inițial concepuți numai ca să transforme înmulțirea în adunare, s-au dovedit a fi, totodată, capabili să transforme și ridicarea la putere într-o înmulțire, iar extragerea rădăcinii, de orice ordin, într-o împărțire.*

62 — *Dată fiind mai ales frecvența calculelor trigonometrice, Neper nu a calculat direct logaritmii numerelor, ci logaritmii sinusului și a tangentei unghiurilor, din primul sfert de cerc, cu 7 zecimale exacte și variind din minut în minut. „Logaritmul unui sinus este un număr ce exprimă, cu foarte bună aproximație, linia care crește în mod egal în timpuri egale", scria el.*

După ce a citit Descriptio, H. Briggs (1550—1630) a plecat, în 1615, la Merhiston și, în urma discuțiilor pe care le-a avut cu Neper, a calculat tabelele de logaritmi zecimali pentru numerele de la 1 la 20 000 și de la 90 000 la 100 000, cu 14 zecimale exacte. Aceste tabele, folosite azi curent, au apărut la Londra în 1624 cu titlul: Aritmetica logarithmica. Tot atunci au apărut la Marburg și Chilias Logarithmorum, altă tabelă de logaritmi, calculată de Kepler (1571—1630), tot după logaritmii lui Neper.

63 — John Neper a considerat corespondența dintre următoarele două progresii:

$$1 \cdot 10^{-7} \quad 2 \cdot 10^{-7} \quad 3 \cdot 10^{-7} \ldots \quad n \cdot 10^{-7} \ldots$$

$$10^{7}(1-10^{-7}) \quad 10^{7}\cdot(1-10^{-7})^{2} \quad 10^{-7}(1-10^{-7})^{3} \ldots 10^{7}(1-10^{7})^{n}.$$

Aceasta, pentru că el a calculat o tabelă logaritmo-trigonometrică și nu o tabelă propriu-zisă de logaritmi, logaritmii calculați de el fiind log. sin x de la $x = 0$ la $x = \frac{\pi}{2}$. În Apendix-ul ce se găsește în ediția din 1648 a tabelei de logaritmi a lui Neper, Oughtred (1574—1660) a dat prima formulare precisă a logaritmilor neperieni, arătînd că $\log_e 10 = 2{,}302584$. De altfel logaritmii descoperiți de Neper nu coincid cu logaritmii numiți mai tîrziu neperieni, naturali sau hiperbolici. Legătura între aceștia este următoarea:

$$\log. \text{Neper } a = 10^{7} \cdot \log_e 10^{7} - 10^{7} \cdot \log_e a$$

(Vom nota mai departe $\log_e = \ln$, păstrînd notația log. numai pentru logaritmii zecimali).

64 — Așadar, se poate spune că înainte de descoperirea calculului diferențial și integral, Neper a considerat ecuația diferențială $y' = \frac{C}{x}$, ecuație care definește funcția logaritmică prin integrala $l_n\, t = C\int_1^t \frac{dx}{x}$.

65 — *În* Algorithmus proportionum, *scris prin 1360, Nicolas Oresme (1323—1382) a introdus calculul cu puteri considerînd chiar și cazul exponenților fracționari, dar el nu a folosit notația exponențială. De asemenea și în* Triparty *a lui Chuquet, se găsesc nu numai calculele cu puteri, dar chiar și rezultatele generale ca :*

$$a^0 = 1,\ a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ și } (a^m)^n = a^{mn}.$$

Numele de exponent *a fost introdus de Michel Stifel, care a observat și el că* $a^0 = 1$. *J. Wallis a explicat foarte clar, în* Arithmetica infinitorum *din 1655 relația dintre puterile cu exponenți pozitivi și negativi. Comparînd șirul de numere 1, 8, 27 și 1, 4, 9 el scria că* 3 este exponentul lui 8 : $(8 = 2^3)$ *și 2 este exponentul lui 4* $(4 = 2^2)$. *În* Synopsis palmariorum Matheseos *(Tabloul laureaților matematicii), tipărit la Londra în 1706, W. Jones a introdus notațiile :*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ și } \frac{n}{a^2} = \sqrt[r]{a^n}$$

66 — *Într-un articol din 1667, N. Mercator arăta că funcția* $\frac{dx}{x}$ *prin care se calculează aria hiperbolei echilatere, diferă de logaritmul zecimal numai printr-un factor constant.*

67 — *În* Logarithmotechnia *Mercator a scris ecuația hiperbolei sub forma* $y = \frac{1}{1+x}$. *Apoi a făcut împărțirea, procedeu* cu totul interzis, *în cazul unei împărțiri nelimitate, — din punct de vedere al rigorii matematice, — atîta vreme cît nu s-au stabilit în prealabil condițiile de posibilitate ale împărțirii. Astfel, el a obținut seria infinită :* $1 - x + x^2 - x^3 \ldots$ *Folosind această serie, el a stabilit aria hiperbolei pe care a exprimat-o prin seria :* $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$ *Mercator a dedus astfel, cel dintîi, seria infinită care definește* $\ln (1 + x)$

anume $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$ unde $|x| < 1$.

În același timp și W. Brouchker a găsit, pe cale geometrică, aria hiperbolei echilatere, cuprinsă între asimptotele $x = 1$ și $x = 2$, sub forma seriei:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

El a stabilit și convergența acestei serii. Deși noțiunea de convergență va fi precizată abia în 1821 de către Cauchy, cuvîntul „convergență", introdus de J. Gregory numai cu un an înainte, în lucrarea sa Cvadratura adevărată a cercului, se răspîndise și era folosit în înțelesul aproximativ ce-l putea avea atunci.

68 — Abia după introducerea definiției logaritmului dată de Euler, prin care logaritmul unui număr era privit ca un anumit exponent, operațiile cu logaritmii au fost privite de matematicieni ca operații algebrice. Folosind simbolul „l", al lui Euler, se scria, de pildă: $lpq = lp + lq$ etc. Însă Cauchy a fost acela care a stabilit că era necesar să existe o deosebire precisă între notația logaritmilor zecimali și aceea a logaritmilor neperieni, propunînd notațiile log și l. Ultima notație este însă înlocuită, de cele mai multe ori, prin ln. Într-o scrisoare adresată lui Goldbach în 1731, Euler spunea: „Notez cu „e" numărul al cărui logaritm hiperbolic este 1". Totuși, în nici un manuscris de al lui Euler din 1727 și nici în mecanica sa din 1736 nu mai apare această notație. Însă ea s-a răspîndit, mai ales prin lucrările lui d'Alembert din 1747, ale lui Daniel Bernoulli din 1760, ale lui Lambert din 1764 ș.a. Folosirea unui simbol prin care să fie notat numărul 2,71828. . . bază a logaritmilor neperieni, se datorește însă lui Roger Cotes. El a întrebuințat litera „M", notînd prin ea dezvoltarea lui „e" în fracție continuă. Euler a notat cu litera „a" baza unui sistem oarecare de logaritmii și a ales probabil litera „e" pentru baza logaritmilor neperieni din cauză că „e" era vocala care urma după „a",

Numărul „e" are o largă circulație atît în matematicile pure cît și în cele aplicate și tot așa funcția exponențială e^x, care are proprietatea că este singura funcție a cărei variație relativă față de argument este egală cu funcția (funcția este egală cu derivata ei). Aceasta explică și importanța logaritmilor neperieni în probleme teoretice.

69 — *În domeniul numerelor reale ridicarea la putere (a^x) nu are sens dacă a este un număr real negativ și x o fracție ireductibilă cu numitorul par. Chiar această imposibilitate, în cazul particular $x = \frac{1}{2}$, a condus la stabilirea numerelor imaginare. Expresia a^x nu are sens nici dacă x este irațional și negativ, cu alte cuvinte expresia $\log_x a$ nu este definită decît dacă a și x sînt amîndouă numere reale pozitive.*

70 — *În 1710 Roger Cotes a descoperit formula $ix = \log(\cos x + i \sin x)$ care a rămas în manuscris. O altă formulă, ce o precede pe aceea a lui Euler, a fost stabilită în 1719 de către Giulio Carlo de Fagnano, anume: $\pi = 2i \ln \frac{1-i}{1+i}$.*

71 — *Arhimede a folosit pentru prima dată progresia geometrică infinită: $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$ avînd rația $q = \frac{1}{4}$ pentru a stabili aria segmentului de parabolă. De altfel, sumarea seriilor finite a fost practicată și de chinezi și există asemenea probleme în* Matematica în nouă părți. *De asemenea aceste probleme i-au interesat și pe hinduși. În secolul al XIV-lea matematicienii hinduși știau să calculeze suma progresiei geometrice infinite descrescătoare.*

72 — *Deși Leibniz și-a dedus seria sa pe o altă cale și independent de cea a lui Gregory, seria lui Leibniz apare ca un caz particular al seriei lui Gregory pentru $x = 1$. Ambele serii au fost însă descoperite și folosite cu vreo două secole mai înainte de către matematicienii hinduși. După cum am văzut, ele se găsesc în cartea* Culegerea științifică *a lui Nilakanta, compusă probabil prin 1501.*

73 — *În cursul secolelor XVII și XVIII matematicienii au folosit seriile fără să țină prea serios seama de convergența sau divergența lor. De altfel aceste noțiuni nici nu se puteau contura precis mai înainte de a fi fost puse bazele riguroase ale Analizei infinitezimale, fapt ce s-a petrecut în secolul al XIX-lea. Din cauza aceasta, se ajungea la multe rezultate curioase. De pildă, în dezvoltarea prin ridicare la puterea* $\frac{1}{2}$ *a binomului* $(1 - x)$:

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 \ldots$$

pentru $x = 2$ *se obținea pentru numărul imaginar „i" următoarea valoare:* $i = -1 - \frac{5}{8} - \frac{7}{16} \ldots$ *exprimată printr-o sumă nelimitată de numere reale! Neștiind cum să se stabilească valorile variabilei, pentru care seria obținută era convergentă, matematicienii admiteau rezultatul, căutînd motivări metafizice. Chiar și Euler considera că seria divergentă* $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ *are ca sumă* $\frac{1}{2}$ *pe care o găsise făcînd media dintre 0 și 1. Lagrange a afirmat, de asemenea, după modelul lui Euler, că seria trigonometrică*

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots = -\frac{1}{2} \text{ pentru } x = \pi!$$

Deși seriile numerice divergente nu pot fi folosite în condițiile obișnuite în calcule, ca acelea convergente, unele dintre ele au astăzi o largă aplicație, mai ales în tehnică. E vorba anume despre acele serii divergente care au termenii descrescători, ca de exemplu seriile ce se prezintă în astronomie. Teoria seriilor divergente a fost dată de d'Alembert în 1768 și apoi completată de alții.

74 — Iată ce scria Cauchy în prefața la cursul său de Analiză: „Am încercat să dau metodelor (analizei) aceeași rigoare care se cere și în geometrie . . . mai ales cînd se consideră trecerea de la seriile convergente la cele divergente și de la mărimile reale la cele imaginare. Trebuie să observăm că se tinde a se

atribui formulelor algebrice o aplicativitate infinită pe cînd, în realitate, cea mai mare parte dintre aceste formule sînt valabile numai în anumite condiții și pentru anumite valori ale mărimilor pe care le cuprind".

75 — *F. W. Bessel a stabilit că, în această serie, coeficienții ei sînt exprimați prin următoarea integrală:*

$$A_n = \int_0^1 \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{1\,.\,2\,.\ldots\,.(n+1)}\,dx$$

de unde rezultă $A_0 = \frac{1}{2}, A_1 = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$ *etc. și deci*

$$C = 0{,}577\ldots = A_0 - \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} - \frac{A_3}{4} + \ldots$$

76 — *În ce privește seria descoperită de Leibniz:*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

deși a fost redescoperită de T. F. Lagny, chiar redescoperitorul ei a arătat că ea nu are aplicație practică, căci pentru calculul primelor 4 zecimale ale lui π *sînt necesare nu mai puțin de 300 de operații. Se spune că seria este „încet convergentă", spre deosebire de celelalte serii ce sînt indicate pentru calcule, fiind „repede convergente".*

77 — *Cea mai mare parte dintre formulele folosite în aceste calcule au fost obținute pornind de la identitatea:*

$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a+b} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a+c}$, *unde* $a^2 + 1 = bc$. *De exemplu, pentru* $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$ *se obține formula lui Euler-Hutton. Pe de altă parte, pornind de la indentitatea:*

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} = \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{b}\right) + \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{c}\right) + \ldots =$$

$= arcgt \frac{b-a}{ab+1} + arc\,tg \frac{c-b}{bc+1} + \ldots$ *Euler a obținut*

1) pentru $a = 1,\ b = 3,\ c = 5 \ldots$:

$$\frac{\pi}{4} = arc\,tg \frac{2}{4} + arc\,tg \frac{2}{16} + arc\,tg \frac{2}{36} + \ldots$$

2) pentru $a = 1,\ b = 2,\ c = 3 \ldots$:

$$\frac{\pi}{4} = arc\,tg \frac{1}{3} + arc\,tg \frac{1}{7} + arc\,tg \frac{1}{13} + \ldots$$

O altă serie stabilită tot de Euler este și :

$$\frac{4}{\pi} = tg \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} tg \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} tg \frac{\pi}{16} + \ldots$$

78 — *Cele 707 zecimale găsite de W. Shanks se află înscrise de-a lungul unei frize, într-o sală a „Palatului descoperirilor" din Paris. Toate calculele pînă la acea dată au fost efectuate doar cu ajutorul tabelelor de logaritmi. Însă în 1949 au fost determinate primele 2 000 de zecimale cu calculatorul electronic ENIAC în 70 de ore, aflîndu-se astfel că W. Shanks a greșit zecimala a 505-a. În 1954 cu ordinatorul NORC s-au calculat 3 000 de zecimale în 12 minute. În 1958 s-au stabilit, tot cu mașina electronică de calcul, primele 10 000 de zecimale ale numărului* π *în cîteva ore, primele 3 000 de cifre fiind găsite numai în 10 minute. În 1961 s-au calculat 20 000 zecimale în* $\frac{3}{4}$ *oră. Tot în 1961 Daniel Shanks a calculat în 9 ore primele 100 000 de zecimale ale lui* π.

79 — *În cursul de analiză publicat de A. L. Cauchy în 1821, au fost stabilite, pentru prima oară, principiile teoriei seriilor infinite și tot acolo au fost deduse condițiile în care ele pot fi folosite practic în calcule. Enunțînd criteriul general de convergență, care-i poartă azi numele, Cauchy a găsit regulele care permit să se constate, în cazuri destul de largi, convergența sau divergența unei serii. În legătură cu seriile divergente el scria : „Am fost nevoit să admit diferite propoziții care vor*

părea, poate, puțin cam dure, ca, de exemplu, aceea că o serie divergentă nu are sumă". Cinci ani mai tîrziu, Abel s-a exprimat cu și mai multă duritate, căci după ce le-a considerat ca fiind „în bloc. o invenție a diavolului" adăuga: „e o rușine că se îndrăznește a se baza pe ele cea mai neînsemnată demonstrație. Se poate broda tot ce vrei, cînd le folosești și ele sînt acelea care au adus atîtea înfrîngeri. . . ."

80 — *Deși astăzi ni se pare că fracțiile zecimale sînt cu mult mai ușor de mînuit decît fracțiile sexagesimale, alta era părerea calculatorilor de acum patru-cinci secole. S-a constatat că, pînă în veacul al XVI-lea, fracțiile zecimale apăreau numai în mod izolat. Introducerea lor sistematică și generală se datorește lui Simion Stevin (1548—1620), care a descris avantajele lor într-o carte tipărită în 1585, cu titlul*: La pratique d'arithmetique *(Practica aritmeticii). În această carte Stevin a încercat să introducă o nouă concepție unitară despre numere. După cum se știe, mai dăinuia încă de atunci influența matematicilor grecești după care* unitatea *nu era număr de asemenea nici rădăcinile patrate sau cubice, ele erau privite ca* segmente, mărimi *sau* numere absurde. *Stevin a protestat scriind: „Unitatea este un număr de aceeași natură ca și celelalte numere. Orice rădăcină este un număr,* $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ *nu sînt* numere absurde *ci* incomensurabile, *căci a fi incomensurabil nu înseamnă a fi absurd".*

81 — N. Burbaki: Les structures fondamentales de l'Analyse, Livre III, Ch. IV. *În* Arithmetica universalis *din 1707, Newton dă numărului următoarea definiție: „Prin număr se înțelege mai puțin o colecție de mai multe unități și mai mult un raport abstract al unei mărimi oarecare către alta, de aceeași specie, considerată drept unitate".*

82 — *Asta înseamnă că nici o ecuație de forma* $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, *unde coeficienții sînt numere raționale, nu se mai poate rezolva printr-o formulă analoagă cu aceea de la ecuațiile de gradul 2, 3 sau 4, formulă prin care se exprimau în mod explicit valorile necunoscutei în funcție*

de coeficienții ecuației, astfel ca între acești coeficienți să se execute un număr finit de operații de adunare, scădere, înmulțire, împărțire și extragere de rădăcină.

83 — *Termenul „transcendent" a fost folosit de Leibniz în 1679 ca să denumească mărimile din domeniul „nealgebric", adică acele mărimi care, fie că depășesc orice limită finită fie că li se aplică un număr nelimitat de operații. Deși a considerat variabile ridicate la un grad infinit, care întrece un grad n al unei ecuații algebrice, el nu a dovedit existența unor asemenea mărimi transcendente. De asemenea și Newton a remarcat, în 1687, că există două categorii de curbe: acelea în care numărul punctelor de intersecție cu o dreaptă este finit și curbe care au un număr infinit de puncte de intersecție cu o dreaptă. Problema numerelor transcendente a mai fost pusă și de Wallis, Ioan Bernoulli, Euler ș.a.*

84 — *Liouville a descoperit o categorie de numere transcendente, definite prin seria convergentă:*

$$\frac{1}{a^{1!}} + \frac{1}{a^{2!}} + \ldots \frac{1}{a^{n!}} + \ldots$$

în care „a" este un număr real mai mare ca 1, sau chiar un număr complex $(x + iy)$, iar exponenții sînt factorialele succesive $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24 \ldots n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

85 — *Într-adevăr, numărul $(-1 + i)$ este rădăcina unei ecuații de gradul întîi, dar aceasta are forma: $x - (-1 + i) = 0$ unde se observă că ecuația nu mai are drept coeficienți* întregi raționali *(adică de gradul întîi), căci $(-1 + i) = -1 + \sqrt{-1}$ este* un întreg algebric de gradul al doilea.

86 — *În* Introducere în analiză, *publicată de Euler în 1748, se punea problema despre natura aritmetică a numerelor de forma $2^{\sqrt{2}}$. La* Congresul Internațional al matematicienilor, *din 1900 de la Paris, David Hilbert a atras atenția asupra mai multor probleme care-și așteptau dezlegarea. Prin-*

tre acestea era și accea asupra naturii aritmetice a numerelor de forma a^b. Această problemă a fost rezolvată definitiv în 1934 de către A. O. Ghelfond (n. 1906) și totodată în mod independent de către C. L. Siegel. S-a dovedit astfel că toate numerele de forma a^b, în care „a" este un număr algebric diferit de zero și unu, iar „b" orice număr irațional pătratic, sînt transcendente. Tot Ghelfond a mai stabilit încă și transcendența numărului e^{π}, care, după cum se vede, nu intră în categoria numerelor de mai sus.

87 — *Georg Cantor (1845—1918), creatorul* teoriei mulțimilor, *a stabilit, într-o lucrare din 1874, două fapte care au produs o surpriză generală, prin noutatea lor paradoxală. Din această cauză ele au dat loc la numeroase controverse. Întîi, el a demonstrat că mulțimea numerelor algebrice* este numărabilă, *și apoi că mulțimea numerelor transcendente* nu este numărabilă, *adică este mai mare decît a numerelor algebrice. Asupra acestor probleme se poate consulta orice tratat modern de analiză matematică.*

88 — *În 1873, Charles Hermite a publicat o nouă demonstrație în legătură cu iraționalitatea numerelor π și π^2. Desigur că aceste preocupări nu erau străine de acelea legate de cercetarea transcendenței numărului „e", ci se legau strîns. Tot din această pricină, după demonstrarea transcendenței lui „e", se căutau alte căi de a o demonstra, în speranța că se va da peste o idee călăuzitoare, mai generală, în legătură cu stabilirea transcendenței unor alte numere date.*

89 — *Într-o scrisoare a lui Ch. Hermite către K. W. Borchard (1817—1880), găsim această mărturisire a lui Hermite: „Nu voi risca să încerc demonstrarea transcendenței numărului π. Dacă alții o vor face, nimeni nu va fi mai fericit ca mine de reușita lor, dar crede-mă, dragă prietene, că nu le va fi deloc ușor".*

BIBLIOGRAFIE

BOULIGAND G.: Vues générales sur la recherche théorique. Rev. gén. sci. T. LXXII, Paris, 1965.

CANTOR M: Vorlesungen über Geschih. Math., vol. I — IV, Leipzig, 1894—1908.

DATTA B AND SING A. N.: History of hindou mathematics. vol. I — II, Lahore, 1935—1938.

HEATH T. L.: A manual of Greek math., Oxford, 1931.

HOFMANN J. E.: Das opus geometricum des Gr. a St. Vincenzio, Abh. Preus. Akad. nr. 13, 1941.

E. KOLMANN: Istoria matematicii în antichitate, Buc., 1963.

E. KOLMANN ŞI A. P. IUŞKEVICI: Istoria matematicii în evul mediu, Buc., 1963.

F. LE LIONNAIS: Les grands courants de la pensée math., Paris, 1948.

NEUGEBAUER O. ŞI STRUWWE O: Über die Geometrie des Kreises in Babylonien. Quell und Stud. Gesch. Math. Abt. B. vol. I, 1931.

SHANKS W. Proceeding of the Royal Society London, vol. XXI şi XXII, 1873.

SMITH D. E: A Source Book in Math, New York, 1929.

STRUVE W. W.: Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museum Moscau, Quell. und Stud. A Bd. I, 1930.

TROPFKE J: Geschichte der Elementar mathematik Bd. IV, Leipzig, 1923.

TANNERY PAUL: Mémoires scientifiques, vol. I — III, Paris, 1912.

VACCA G: Sulla constante di Eulero. Atti reale Acad. Lincei (6), vol. I, 1925.

VAHLEN TH: Konstruktionen und Approxim., Leipzig, 1911.

WIELEITNER H: Istoria matematicii de la Descartes, Buc., 1964.

ZEUTHEN H. G.: Histoire des mathém. dans l'Antiquité et le Moyen-age, Paris, 1902.

CUPRINS

CUVINT ÎNAINTE

Preistoria numărului π 9
Geometria greacă şi numerele iraţionale 18
Geometria greacă şi cvadratura cercului 30
Rezultatele lui Arhimede în privinţa cvadraturii cercului. 42
Numerele iraţionale în matematicile din Orientul îndepărtat şi mijlociu 51
Interesul pentru cvadratura cercului la matematicienii din Europa occidentală, în Evul Mediu 60
Cvadratura cercului în timpul Renaşterii 68
Alte modalităţi de a exprima numărul π 77
Numărul „i“ 88
Numărul „e“ 95
Numărul „C“ 107
Din nou despre numerele π, „e“ şi „C“ 116
Secretul numerelor favorite . . . 124

NOTE 133

Bibliografie 171

Îndemnul pentru a scrie acest volum mi-a venit din partea lui Georges Bouligand, profesor onorific la Facultatea de Ştiinţe din Paris, figură bine cunoscută în lumea matematicienilor de la noi şi din alte părţi. Trimiţîndu-i, în semn de omagiu, cartea mea „Istoria numărului π", d-sa mi-a sugerat să mai scriu una, în care să prezint, alături de istoria numărului π, şi pe acelea ale altor *numere favorite*, ca: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, π, „i", „e" sau „C".

Lei 5